

ネーター的パーフェクトイド塔における環論的性質 の傾化不変性

林 和輝（東京科学大学）

第 33 回整数論サマースクール (於 矢太樓・矢太樓南館)

2026 年 8 月 24 日

本講演は次の論文に基づく。

- K. Hayashi, *Structural properties and tilting correspondences of perfectoid towers*, arXiv:2605.27283.

§1. パーフェクトイド環

今回のサマースクールのテーマである「関数体の数論」の歴史にも見られるように、代数体（**混標数**）と関数体（**正標数**）の類似は基本的である。P. Scholze が導入した**パーフェクトイド理論**は、このような類似を捉えるための道具の一つである。

以下、素数 p を固定し、絶対 Frobenius を φ で表す。

定理 1.1 (O. Gabber–L. Ramero¹)

可換環 B が**パーフェクトイド環** $\iff \exists \varpi \in B$ s.t.

① $p \in \varpi^p B$ であり、かつ、 B は ϖ 進完備である。

②

$$\begin{array}{ccc} B/\varpi^p B & \xrightarrow{\varphi} & B/\varpi^p B \\ \downarrow & & \parallel \\ B/\varpi B & \dashrightarrow^{\cong} & B/\varpi^p B \end{array}$$

③ $B[\varpi^\infty] \xrightarrow{\sim} B[\varpi^\infty]; x \mapsto x^p.$

¹Almost rings and perfectoid spaces, October 1, 2024, Release 8.

混標数パーフェクトイド環に対応する正標数パーフェクトイド環がある²。

定義 1.2

(混標数) パーフェクトイド環 B の傾化 (tilt) を次で定義する。

$$B^b \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim \left(B/pB \xleftarrow{\varphi} B/pB \xleftarrow{\varphi} B/pB \xleftarrow{\varphi} \cdots \right)$$

- B^b もパーフェクトイド環である。これは B^b が完全 $\mathbb{F}_p$ 代数である、すなわち、 B^b の絶対 Frobenius が全単射であることを意味する。

Fontaine の $\sharp$ 写像と呼ばれる乗法的写像 $\sharp: B^b \rightarrow B$ によって、 B と B^b を比較することができる。

命題 1.3

$\sharp(\varpi^b)$ が ϖ の単元倍となるような元 $\varpi^b \in B^b$ があり、次が成り立つ。

- $B^b / \varpi^b B^b \xrightarrow{\cong} B / \varpi B.$
- $B^b [(\varpi^b)^\infty] \xrightarrow{\cong} B[\varpi^\infty].$

²ここでの「混標数」は「正標数でない」くらいの意味。

例 1.4

- ① $\mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]^\wedge$ はパーフェクトイド環で、傾化は $\mathbb{F}_p[[T]][T^{1/p^\infty}]^\wedge$.
- ② 同様に $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ もパーフェクトイド環であり、 $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})^\flat \cong \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{F}_p((T))}}$ となる。
- ③ $\mathbb{Z}_p[\zeta_{p^\infty}]^\wedge$ はパーフェクトイド環で、傾化は $\mathbb{F}_p[[T]][T^{1/p^\infty}]^\wedge$.
 $((1 - \zeta_p)^{p-1}$ は p の単元倍であり、かつ、 $1 - \zeta_p$ の単元倍は p 乗根 ϖ をもつことがわかる。)
- ④ 一般に、Scholze の意味でのパーフェクトイド体 K の整数環 $\mathcal{O}_K$ はパーフェクトイド環であり、 $(\mathcal{O}_K)^\flat \cong \mathcal{O}_{K^\flat}$ となる。
- ⑤ 最初の例の一般化として、標数 p の完全体 k を剰余体にもつ混標数の完備正則局所環 $W(k)[[x_1, \dots, x_d]]/(p - f)$ ($f = x_1$ または $f \in (x_1, \dots, x_d)^2 \setminus \{0\}$) に対し、

$$\left(W(k)[[x_1, \dots, x_d]][x_1^{1/p^\infty}, \dots, x_d^{1/p^\infty}]/(p - f) \right)^\wedge$$

はパーフェクトイド環であり、傾化は

$$\left(k[[x_1, \dots, x_d]][x_1^{1/p^\infty}, \dots, x_d^{1/p^\infty}] \right)^\wedge.$$

近年では、B. Bhatt–P. Scholze³が与えた次の解釈も重要である。

プリズム (A, I) とは、**Frobenius リフト**

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/pA & \xrightarrow{\varphi} & A/pA \end{array}$$

が与えられた (p -torsion free な) 可換環 A と「よい」イデアル I の組。

- (A, I) が**完全** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \phi$ が同型。

例 1.5

次の圏同値がある。

$$\begin{array}{ccc} \{\text{完全プリズム}\} & \xleftarrow{\sim} & \{\text{パーフェクトイド環}\} \\ (A, I) & \longmapsto & A/I \\ (W(B^b), \text{Ker } \theta) & \longleftarrow & B \end{array}$$

ここで $W(B^b)$ は Witt 環、 $\theta: W(B^b) \rightarrow B$ は **Fontaine の θ 写像**を表す。

³Ann. of Math. (2) **196**(3), (2022), 1135–1275.

パーフェクトイド理論の基本定理とも言うべき結果が次である。

概純性定理 (Scholze⁴, K. S. Kedlaya–R. Liu⁵)

B をパーフェクトイド環、 $B[\frac{1}{p}] \hookrightarrow C'$ を有限エタール拡大とすると、 B の C' における整閉包 C の p 進完備化 $\hat{C}$ はパーフェクトイド環である。

- Y. André⁶ は、概純性定理を一般化したパーフェクトイド Abhyankar の補題を証明し、これを用いて次の定理を導いた。

直和因子予想 (→直和因子定理)

正則環 R 上の有限拡大 S は、 R 加群として R を直和因子にもつ。

この予想は、約 40 年もの間、混標数の場合のみが未解決であった。André の仕事を契機として、パーフェクトイド理論は混標数可換環論にも広く応用され、近年では混標数特異点論の研究が盛んである。

- Bhatt–Scholze によるプリズムを用いた一般化も知られている。

⁴Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **116**, (2012), 245–313.

⁵Astérisque **371**, (2015).

⁶Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **127**, (2018), 1–70.

B を定義 1.1 のようなパーフェクトイド環とする。

定義より $B/\varpi^p B$ の絶対 Frobenius は全射であるから、

$$\varpi_1^p \equiv \varpi \bmod \varpi^p B$$

となる $\varpi_1 \in B$ が存在する。このとき

$$\varpi_1^p = \varpi + \varpi^p b_1 = \varpi u_1, \quad u_1 := 1 + \varpi^{p-1} b_1 \in B^\times.$$

同様に、 $\varpi_2^p \equiv \varpi_1 \bmod \varpi^p B$ となる $\varpi_2 \in B$ が存在する。これを繰り返すことで、 B の元の列 $\{\varpi_n\}_{n \geq 1}$ と $\{u_n\}_{n \geq 1}$ で

$$\varpi_n^{p^n} = \varpi u_n, \quad u_n \in B^\times \quad (\forall n \geq 1)$$

なるものを得る⁷。このとき B のイデアル $\bigcup_{n \geq 1} (\varpi_n)$ は有限生成でない。

したがって

⁷証明には工夫を要するが、より強く、 u_n を n に依存しないようにとることもできる (すなわち、 ϖ の単元倍の p べき乗根 $(\varpi u)^{1/p}, (\varpi u)^{1/p^2}, \dots$ が存在する)。

$(\mathbb{F}_p$ 代数でない) パーフェクトイド環は決してネーター環でない！

しかし、たとえば $(\mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}])^\wedge$ というパーフェクトイド環は

$$\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p[p^{1/p}] \subset \mathbb{Z}_p[p^{1/p^2}] \subset \cdots \subset \mathbb{Z}_p[p^{1/p^i}] \subset \cdots$$

という**ネーター環**の塔の極限（の完備化）である。このような

パーフェクトイド環を近似する（ネーター）環の塔

を公理化したものが、次節で述べる**パーフェクトイド塔**である。

パーフェクトイド塔を使うと…

- ① ネーター環に対しても傾化ができる（定義 2.2）⁸。
（混標数の**ネーター環**に対応する正標数の**ネーター環**を構成できる）。
- ② 逆に、ネーター環の理論を用いてパーフェクトイド環を調べるという方向の応用も期待される。

⁸定義 1.2 の傾化は、ネーター環だと面白くない（e.g., $(\mathbb{Z}_p)^\flat = (\mathbb{Z}_p[T])^\flat = \mathbb{F}_p$ ）。

§2. パーフェクトイド塔

(※以下の定義 2.1 ~ 例 2.5 は、§1 の定理 1.1 ~ 例 1.5 とそれぞれ対応している。)

定義 2.1 (伊城-仲里-下元 [1])

可換環の帰納系 $\{R_i\}_{i \geq 0} = (R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow \cdots \rightarrow R_i \rightarrow \cdots)$ が
((R_0, pR_0) から生じる) **パーフェクトイド塔** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \varpi \in R_1 \text{ s.t. } \forall i \geq 0$

① $pR_1 = \varpi^p R_1$, かつ、 R_i は p 進 Zariski 的である⁹。

②

$$\begin{array}{ccc} R_{i+1}/pR_{i+1} & \xrightarrow{\varphi} & R_{i+1}/pR_{i+1} \\ \downarrow & \searrow \textcolor{blue}{\text{\scriptsize $\exists F_i$}} & \uparrow \\ R_{i+1}/\varpi R_{i+1} & \dashrightarrow^{\cong} & R_i/pR_i \end{array}$$

③ $R_i[p^\infty] = R_i[p]$, かつ、 F_i は $R_{i+1}[p^\infty] \xrightarrow{\sim} R_i[p^\infty]$ を誘導する。

- $R_\infty := \varinjlim_i R_i$ の p 進完備化 $\widehat{R_\infty}$ はパーフェクトイド環になる。

⁹ R_i のすべての極大イデアルが p を含むということ。 R_i が p 進完備なら満たされる。

定義 2.2 (伊城-仲里-下元)

(混標数) パーフェクトイド塔 $\{R_i\}_{i \geq 0}$ の傾化 $\{R_i^{s,b}\}_{i \geq 0}$ を次で定義する。

$$R_i^{s,b} \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim \left(R_i/pR_i \xleftarrow{F_i} R_{i+1}/pR_{i+1} \xleftarrow{F_{i+1}} R_{i+2}/pR_{i+2} \xleftarrow{F_{i+2}} \cdots \right)$$

- $\{R_i^{s,b}\}_{i \geq 0}$ もパーフェクトイド塔である。これは次を意味する:

$$\{R_i^{s,b}\}_{i \geq 0} \cong \left(R^{s,b} \hookrightarrow (R^{s,b})^{1/p} \hookrightarrow (R^{s,b})^{1/p^2} \hookrightarrow \cdots \right).$$

定理 2.3 (伊城-仲里-下元)

$\text{Ker}(R_0^{s,b} \xrightarrow{\text{pr}_0} R_0/pR_0)$ を生成する元 $p^{s,b} \in R_0^{s,b}$ があり、次が成り立つ。

- ① $R_i^{s,b}/p^{s,b}R_i^{s,b} \xrightarrow{\cong} R_i/pR_i.$
- ② $R_i^{s,b}[(p^{s,b})^\infty] \cong R_i[p^\infty].$

- Fontaine の $\sharp$ 写像を用いた解釈もできる [4]。

例 2.4 (伊城-仲里-下元)

- ① 例 1.4 (5) のように、混標数の完備正則局所環からパーフェクトイド塔を構成できる。
- ② より一般に、標数 p の完全体 k を剰余体にもつ混標数の完備局所対数的正則環 $(\cong W(k)[\mathbb{N}^{\oplus r} \oplus Q]/(p-f))$ からパーフェクトイド塔を構成できる。たとえば、次のような例がある：

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_p[[x, y, z]]/(xy - pz) &\hookrightarrow \mathbb{Z}_p[[x^{\frac{1}{p}}, y^{\frac{1}{p}}, z^{\frac{1}{p}}, p^{\frac{1}{p}}]]/(x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{p}} - p^{\frac{1}{p}}z^{\frac{1}{p}}) \hookrightarrow \cdots, \\ \mathbb{F}_p[[x, y, z, w]]/(xy - zw) &\hookrightarrow \mathbb{F}_p[[x^{\frac{1}{p}}, y^{\frac{1}{p}}, z^{\frac{1}{p}}, w^{\frac{1}{p}}]]/(x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{p}} - z^{\frac{1}{p}}w^{\frac{1}{p}}) \hookrightarrow \cdots.\end{aligned}$$

- ③ パーフェクトイド環もパーフェクトイド塔とみなすことができる：

$$\begin{aligned}B &\xrightarrow{\text{id}} B \xrightarrow{\text{id}} B \xrightarrow{\text{id}} \cdots, \\ B^b &\xrightarrow{\text{id}} B^b \xrightarrow{\text{id}} B^b \xrightarrow{\text{id}} \cdots.\end{aligned}$$

次の構成はこれらの例をすべて含み、さらに、正規でも Cohen-Macaulay でもないネーター環から始まるパーフェクトイド塔の例をも与えた。

例 2.5 (石塚 [2], 伊城-下元 [3])

適切な**プリズム** (A, I) からパーフェクトイド塔を構成できる:

$$\begin{aligned} A/I &\xrightarrow{\phi} A/\phi(I)A \xrightarrow{\phi} A/\phi^2(I)A \xrightarrow{\phi} \cdots, \\ A/pA &\xrightarrow{\varphi} A/pA \xrightarrow{\varphi} A/pA \xrightarrow{\varphi} \cdots. \end{aligned}$$

- ① $A = \mathbb{Z}_p[q]$, $I = ([p]_q = 1 + q + \cdots + q^{p-1})$ とすると

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p[\zeta_p] &\hookrightarrow \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^2}] \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^3}] \hookrightarrow \cdots, \\ \mathbb{F}_p[[T]] &\hookrightarrow \mathbb{F}_p[[T]][T^{1/p}] \hookrightarrow \mathbb{F}_p[[T]][T^{1/p^2}] \hookrightarrow \cdots. \end{aligned}$$

- ② $A = \mathbb{Z}_p[[x, y, z]]/(xy, xz)$, $I = (p - x)$ とすると

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p[[y, z]]/(py, pz) &\hookrightarrow \mathbb{Z}_p[[y^{\frac{1}{p}}, z^{\frac{1}{p}}]]/(p^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{p}}, p^{\frac{1}{p}}z^{\frac{1}{p}}) \hookrightarrow \cdots, \\ \mathbb{F}_p[[x, y, z]]/(xy, xz) &\hookrightarrow \mathbb{F}_p[[x^{\frac{1}{p}}, y^{\frac{1}{p}}, z^{\frac{1}{p}}]]/(x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{p}}, x^{\frac{1}{p}}z^{\frac{1}{p}}) \hookrightarrow \cdots. \end{aligned}$$

これは、単体複体 Δ から定まる **p -Stanley-Reisner 環** $\mathbb{Z}_p[[\Delta]]$ に対して一般化できる。

S を混標数のネーター局所整域とする。

定理 2.6 (Y. André, Gabber–Ramero, 下元¹⁰)

S 上の (big Cohen–Macaulay 代数であるような) パーフェクトイド環が存在する。

一方で、 S から始まるパーフェクトイド塔が存在するかは未解決である。
(もし肯定的に解決されれば、それは **Serre の正值性予想** の肯定的解決を導く [3]。)

定理 2.6 の証明において鍵となるのは **パーフェクトイド Abhyankar の補題** である。この原点である G. Faltings¹¹ の **概純性定理** (cf. §1) と関連して、F. Andreatta¹² による分岐理論を用いた議論を参考に次の結果を得た。

定理 2.7 (伊城–H.–下元 [4])

S は正則局所環 R 上の正規局所整域で、 $R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}]$ はエタールであるとする。 S_i を R_i の $(R_i \otimes_R S)[\frac{1}{p}]$ における整閉包とする。このとき

$\exists \varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, 1) \exists N \geq 0$ s.t. $S_N \rightarrow S_{N+1} \rightarrow \cdots$ はパーフェクトイド塔。

¹⁰Math. Ann. **372** (3-4), (2018), 1167–1188.

¹¹J. Amer. Math. Soc. **1**, (1988), 255–299. Astérisque **279**, (2002), 186–270.

¹²Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **39**, (2006), 599–647.

§3. 主結果

ネーター局所環 $(R, \mathfrak{m})$ に対して

Krull 次元 $\dim(R)$, 埋込次元 $\operatorname{edim}(R) := \dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$, 深度 $\operatorname{depth}(R)$ などの不変量が定まり、これらを用いて

正則 $(\implies)$ 完全交叉 $(\implies)$ Gorenstein $(\implies)$ Cohen-Macaulay

などの（環論的）性質が定義される。

$\{R_i\}_{i \geq 0}$ を完備ネーター局所環からなるパーフェクトイド塔とする。

このとき、傾化 $\{R_i^{s,b}\}_{i \geq 0}$ も完備ネーター局所環からなる。

そこで、 R_i と $R_i^{s,b}$ の不変量および性質を比較する。簡単のため $R := R_0$ と $R^{s,b} := R_0^{s,b}$ で考える。次の Koszul 複体の同型が本質的である。

定理 A

R の元の列 $x = p, x_2, \dots, x_n$ と $R^{s,b}$ の元の列 $x^{s,b} = p^{s,b}, x_2^{s,b}, \dots, x_n^{s,b}$ を定理 2.3 (1) の同型で対応するようにとる。このとき

$$K_{\bullet}(x; R) \cong K_{\bullet}(x^{s,b}; R^{s,b}) \text{ in } D(\operatorname{Mod} \mathbb{Z}).$$

- $K_{\bullet}(p; R) = [R \xrightarrow{p} R]$ および $K_{\bullet}(p^{s.b}; R^{s.b}) = [R^{s.b} \xrightarrow{p^{s.b}} R^{s.b}]$ だから、 $n = 1$ のときの定理 A は定理 2.3 に他ならない。

定理 B

- ① $\dim(R) = \dim(R^{s.b})$. $\operatorname{edim}(R) = \operatorname{edim}(R^{s.b})$. $\operatorname{depth}(R) = \operatorname{depth}(R^{s.b})$.
 - ② R が正則 (resp. 完全交叉、Gorenstein, Cohen–Macaulay) $\iff R^{s.b}$ がそう。
- R が p -torsion free ($\iff R^{s.b}$ が $p^{s.b}$ -torsion free) の場合は、埋込次元と正則性の比較を除くすべての結果は自明である。
 - 一般の場合は、 $\tilde{R} := R/R[p]$ を用いた次の分解を使って帰着させる：

$$R \xrightarrow{\cong} \tilde{R} \times_{(\tilde{R}/p\tilde{R})_{\operatorname{red}}} (R/pR)_{\operatorname{red}}.$$

p 振れを持つ例として p -Stanley–Reisner 環 $\mathbb{Z}_p[\![\overline{\Delta}]\!]$ (例 2.5 (2)) を考える。

例 3.1

$\mathbb{Z}_p[\![\overline{\Delta}]\!]$ が Cohen–Macaulay $\iff \mathbb{F}_p[\![\Delta]\!]$ が Cohen–Macaulay.

等標数においては **Reisner の判定法**があるので、後者は Δ の位相的ホモロジ一群で特徴づけられる。たとえば Δ が実射影平面の三角形分割なら、 $p = 2$ を除いて Cohen–Macaulay であることがわかる。

パーフェクトイド塔に関する全論文（公表順）

- [1] S. Ishiro, K. Nakazato, K. Shimomoto, *Perfectoid towers and their tilts: with an application to the étale cohomology groups of local log-regular rings*, Algebra Number Theory **19**(12), (2025), 2307–2358.
- [2] R. Ishizuka, *Perfectoid towers generated from prisms*, Nagoya Math. J. **261**, e17 (2026).
- [3] S. Ishiro, K. Shimomoto, *δ -rings, perfectoid towers, and $\lim$ Cohen-Macaulay sequences*, preprint, (2025). arXiv:2509.06527.
- [4] K. Hayashi, S. Ishiro, K. Shimomoto, *An application of Fontaine's monoidal maps to perfectoid towers*, preprint, (2026), arXiv:2602.21605.
- [5] K. Hayashi, *Structural properties and tilting correspondences of perfectoid towers*, preprint, (2026), arXiv:2605.27283.
- [6] K. Hayashi, *A characterization of perfectoid towers in terms of conormal cones*, preprint, (2026), arXiv:2605.27279.
- [7] K. Hayashi, *Regular rings and perfectoid towers*, preprint, (2026), arXiv:2605.27337.