

Fontaine のモノイダル写像のパーフェクトイド塔への応用について

林 和輝（東京科学大学）
伊城 慎之介（群馬工高専）
下元 数馬（東京科学大学）

日本数学会 2026 年度年会 (於 東京理科大学)

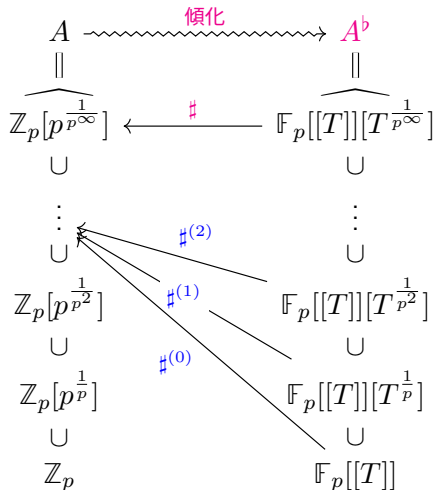
2026 年 3 月 26 日

本講演は次の論文に基づく。

- ▶ K. Hayashi, S. Ishiro, K. Shimomoto, *An application of Fontaine's monoidal maps to perfectoid towers*, arXiv:2602.21605.

パーフェクトイド環

パーフェクトイド塔



パーフェクトイド環と Fontaine のモノイダル写像

A : p 振れを持たないパーフェクトイド環 (e.g., $\mathbb{Z}_p[\widehat{p^{1/p^\infty}}]$)

1. $p \in \varpi^p A$.
2. $A/\varpi A \xrightarrow{\cong} A/\varpi^p A; x \mapsto x^p$.

命題-定義 (Fontaine)

$$\sharp: A^\flat := \varprojlim_{\text{Frob}} A/pA \xleftarrow{\cong} \varprojlim_{x \mapsto x^p} A \xrightarrow{\text{pr}_0} A$$

定理 (Scholze, Kedlaya–Liu, 衛藤–堀内–下元¹)

$\varpi^\flat \in A^\flat$: 単元倍を除いて $(\varpi^\flat)^\sharp := \sharp(\varpi^\flat) = \varpi$ となる元 (非零因子)。

A が $A[\frac{1}{\varpi}]$ において完全閉² $\implies A^\flat$ が $A^\flat[\frac{1}{\varpi^\flat}]$ において完全閉。

¹Tokyo J. Mathematics **47**, (2024), 395–409.

²環の乗法的構造のみで特徴づけられる性質。

パーフェクトイド環と Fontaine のモノイダル写像

A : p 振れを持たないパーフェクトイド環 (e.g., $\mathbb{Z}_p[\widehat{p^{1/p^\infty}}]$)

1. $p \in \varpi^p A$.
2. $A/\varpi A \xrightarrow{\cong} A/\varpi^p A; x \mapsto x^p$.

命題-定義 (Fontaine)

$$\sharp: A^\flat := \varprojlim_{\text{Frob}} A/pA \xleftarrow{\cong} \varprojlim_{x \mapsto x^p} A \xrightarrow{\text{pr}_0} A$$

定理 (Scholze, Kedlaya–Liu, 衛藤–堀内–下元¹)

$\varpi^\flat \in A^\flat$: 単元倍を除いて $(\varpi^\flat)^\sharp := \sharp(\varpi^\flat) = \varpi$ となる元 (非零因子)。

A が $A[\frac{1}{\varpi}]$ において完全閉² $\implies A^\flat$ が $A^\flat[\frac{1}{\varpi^\flat}]$ において完全閉。

¹Tokyo J. Mathematics **47**, (2024), 395–409.

²環の乗法的構造のみで特徴づけられる性質。

パーフェクトイド環と Fontaine のモノイダル写像

A : p 振れを持たないパーフェクトイド環 (e.g., $\mathbb{Z}_p[\widehat{p^{1/p^\infty}}]$)

1. $p \in \varpi^p A$.
2. $A/\varpi A \xrightarrow{\cong} A/\varpi^p A; x \mapsto x^p$.

命題-定義 (Fontaine)

$$\sharp: A^b := \varprojlim_{\text{Frob}} A/pA \xleftarrow{\cong} \varprojlim_{x \mapsto x^p} A \xrightarrow{\text{pr}_0} A$$

定理 (Scholze, Kedlaya–Liu, 衛藤–堀内–下元¹)

$\varpi^b \in A^b$: 単元倍を除いて $(\varpi^b)^\sharp := \sharp(\varpi^b) = \varpi$ となる元 (非零因子)。

A が $A[\frac{1}{\varpi}]$ において完全閉² $\implies A^b$ が $A^b[\frac{1}{\varpi^b}]$ において完全閉。

¹Tokyo J. Mathematics **47**, (2024), 395–409.

²環の乗法的構造のみで特徴づけられる性質。

パーフェクトイド塔と Fontaine のモノイダル写像

$\{R_n\}_{n \geq 0} = (R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow \cdots) : p$ 振れを持たない **パーフェクトイド塔**³

1. $p \in I_0 \subset R_0$, $I_1 \subset R_1$, $I_1^p = I_0 R_1$.

2. $F_n: R_{n+1}/I_0 R_{n+1} \rightarrow R_{n+1}/I_1 R_{n+1} \xrightarrow{\cong} R_n/I_0 R_n$.

▶ $R_\infty := \varinjlim_{n \geq 0} R_n$ の I_1 進完備化 $\widehat{R_\infty}$ はパーフェクトイド環。

命題-定義 (H.-伊城-下元)

$$\begin{aligned} \#^{(n)}: R_n^{s,b} &:= \varprojlim (\cdots \xrightarrow{F_{n+1}} R_{n+1}/I_0 R_{n+1} \xrightarrow{F_n} R_n/I_0 R_n) \\ &\xleftarrow{\cong} \varprojlim (\cdots \xrightarrow{(-)^p} R_{n+1} + I_0 \widehat{R_\infty} \xrightarrow{(-)^p} R_n + I_0 \widehat{R_\infty}) \xrightarrow{\text{pr}_0} R_n + I_0 \widehat{R_\infty} \end{aligned}$$

定理 (H.-伊城-下元)

$I_0 = (f_0)$, $I_0^{s,b} := \text{Ker}(R_0^{s,b} \xrightarrow{\text{pr}_0} R_0/I_0) = (f_0^{s,b}) \subset R_0^{s,b}$. このとき

$R_n: R_n[\frac{1}{f_0}]$ において完全閉 $(\forall n) \implies R_n^{s,b}: R_n^{s,b}[\frac{1}{f_0^{s,b}}]$ において完全閉 $(\forall n)$

³S. Ishiro, K. Nakazato, K. Shimomoto, ANT **19**(12), (2025), 2307–2358.

パーフェクトイド塔と Fontaine のモノイダル写像

$\{R_n\}_{n \geq 0} = (R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow \cdots) : p$ 振れを持たないパーフェクトイド塔³

1. $p \in I_0 \subset R_0$, $I_1 \subset R_1$, $I_1^p = I_0 R_1$.

2. $F_n: R_{n+1}/I_0 R_{n+1} \rightarrow R_{n+1}/I_1 R_{n+1} \xrightarrow{\cong} R_n/I_0 R_n$.

▶ $R_\infty := \varinjlim_{n \geq 0} R_n$ の I_1 進完備化 $\widehat{R_\infty}$ はパーフェクトイド環。

命題-定義 (H.-伊城-下元)

$$\begin{aligned} \sharp^{(n)}: R_n^{s,b} &:= \varprojlim (\cdots \xrightarrow{F_{n+1}} R_{n+1}/I_0 R_{n+1} \xrightarrow{F_n} R_n/I_0 R_n) \\ &\xleftarrow{\cong} \varprojlim (\cdots \xrightarrow{(-)^p} R_{n+1} + I_0 \widehat{R_\infty} \xrightarrow{(-)^p} R_n + I_0 \widehat{R_\infty}) \xrightarrow{\text{pr}_0} R_n + I_0 \widehat{R_\infty} \end{aligned}$$

定理 (H.-伊城-下元)

$I_0 = (f_0)$, $I_0^{s,b} := \text{Ker}(R_0^{s,b} \xrightarrow{\text{pr}_0} R_0/I_0) = (f_0^{s,b}) \subset R_0^{s,b}$. このとき

$R_n: R_n[\frac{1}{f_0}]$ において完全閉 $(\forall n) \implies R_n^{s,b}: R_n^{s,b}[\frac{1}{f_0^{s,b}}]$ において完全閉 $(\forall n)$

³S. Ishiro, K. Nakazato, K. Shimomoto, ANT **19**(12), (2025), 2307–2358.

パーフェクトイド塔と Fontaine のモノイダル写像

$\{R_n\}_{n \geq 0} = (R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow \cdots) : p$ 振れを持たない **パーフェクトイド塔**³

1. $p \in I_0 \subset R_0$, $I_1 \subset R_1$, $I_1^p = I_0 R_1$.

2. $F_n: R_{n+1}/I_0 R_{n+1} \rightarrow R_{n+1}/I_1 R_{n+1} \xrightarrow{\cong} R_n/I_0 R_n$.

▶ $R_\infty := \varinjlim_{n \geq 0} R_n$ の I_1 進完備化 $\widehat{R_\infty}$ はパーフェクトイド環。

命題-定義 (H.-伊城-下元)

$$\begin{aligned} \sharp^{(n)}: R_n^{s,b} &:= \varprojlim (\cdots \xrightarrow{F_{n+1}} R_{n+1}/I_0 R_{n+1} \xrightarrow{F_n} R_n/I_0 R_n) \\ &\xleftarrow{\cong} \varprojlim (\cdots \xrightarrow{(-)^p} R_{n+1} + I_0 \widehat{R_\infty} \xrightarrow{(-)^p} R_n + I_0 \widehat{R_\infty}) \xrightarrow{\text{pr}_0} R_n + I_0 \widehat{R_\infty} \end{aligned}$$

定理 (H.-伊城-下元)

$I_0 = (f_0)$, $I_0^{s,b} := \text{Ker}(R_0^{s,b} \xrightarrow{\text{pr}_0} R_0/I_0) = (f_0^{s,b}) \subset R_0^{s,b}$. このとき

$R_n: R_n[\frac{1}{f_0}]$ において完全閉 $(\forall n) \implies R_n^{s,b}: R_n^{s,b}[\frac{1}{f_0^{s,b}}]$ において完全閉 $(\forall n)$

³S. Ishiro, K. Nakazato, K. Shimomoto, ANT **19**(12), (2025), 2307–2358.

パーフェクトイド塔と Fontaine のモノイダル写像

$\{R_n\}_{n \geq 0} = (R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow \cdots) : p$ 振れを持たないパーフェクトイド塔³

1. $p \in I_0 \subset R_0$, $I_1 \subset R_1$, $I_1^p = I_0 R_1$.

2. $F_n: R_{n+1}/I_0 R_{n+1} \rightarrow R_{n+1}/I_1 R_{n+1} \xrightarrow{\cong} R_n/I_0 R_n$.

▶ $R_\infty := \varinjlim_{n \geq 0} R_n$ の I_1 進完備化 $\widehat{R_\infty}$ はパーフェクトイド環。

命題-定義 (H.-伊城-下元)

$$\begin{aligned} \sharp^{(n)}: R_n^{s,b} &:= \varprojlim (\cdots \xrightarrow{F_{n+1}} R_{n+1}/I_0 R_{n+1} \xrightarrow{F_n} R_n/I_0 R_n) \\ &\xleftarrow{\cong} \varprojlim (\cdots \xrightarrow{(-)^p} R_{n+1} + I_0 \widehat{R_\infty} \xrightarrow{(-)^p} R_n + I_0 \widehat{R_\infty}) \xrightarrow{\text{pr}_0} R_n + I_0 \widehat{R_\infty} \end{aligned}$$

定理 (H.-伊城-下元)

$I_0 = (f_0)$, $I_0^{s,b} := \text{Ker}(R_0^{s,b} \xrightarrow{\text{pr}_0} R_0/I_0) = (f_0^{s,b}) \subset R_0^{s,b}$. このとき

$R_n: R_n[\frac{1}{f_0}]$ において完全閉 $(\forall n) \implies R_n^{s,b}: R_n^{s,b}[\frac{1}{f_0^{s,b}}]$ において完全閉 $(\forall n)$

³S. Ishiro, K. Nakazato, K. Shimomoto, ANT **19**(12), (2025), 2307–2358.

G. Faltings⁴は p 進 Hodge 理論の文脈で以下のような状況を考えて。

- ▶ $R = W(k)[[x_2, \dots, x_d]]$ (k : 標数 $p > 0$ の完全体).
- ▶ $R_n := R[p^{\frac{1}{p^n}}, x_2^{\frac{1}{p^n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{p^n}}]$ ($\forall n \geq 0$).
- ▶ $R \hookrightarrow S$: 正規局所整域の有限拡大 s.t. $R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}]$ はエタール。
- ▶ $S_n : R_n$ の $(R_n \otimes_R S)[\frac{1}{p}]$ における整閉包 ($\forall n \geq 0$).

定理 (H.-伊城-下元)

1. ある有理数 $\varepsilon \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ と整数 $N \geq 0$ が存在し、 $\{S_n\}_{n \geq N}$ は $(S_N, (p^\varepsilon))$ から生じるパーフェクトイド塔となる。
2. $n \geq N$ に対し、 $S_n^{s,b}$ は正規 (= 局所的に整閉整域) である。

注意

$S_n^{s,b}$ の正規性自体は F. Andreatta⁵によって示されている。

⁴J. Amer. Math. Soc. **1**, (1988), 255–299. Astérisque **279**, (2002), 185–270.

⁵Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **39**, (2006), 599–647.

G. Faltings⁴は p 進 Hodge 理論の文脈で以下のような状況を考えて。

- ▶ $R = W(k)[[x_2, \dots, x_d]]$ (k : 標数 $p > 0$ の完全体).
- ▶ $R_n := R[p^{\frac{1}{p^n}}, x_2^{\frac{1}{p^n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{p^n}}]$ ($\forall n \geq 0$).
- ▶ $R \hookrightarrow S$: 正規局所整域の有限拡大 s.t. $R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}]$ はエタール。
- ▶ $S_n : R_n$ の $(R_n \otimes_R S)[\frac{1}{p}]$ における整閉包 ($\forall n \geq 0$).

定理 (H.-伊城-下元)

1. ある有理数 $\varepsilon \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ と整数 $N \geq 0$ が存在し、 $\{S_n\}_{n \geq N}$ は $(S_N, (p^\varepsilon))$ から生じるパーフェクトイド塔となる。
2. $n \geq N$ に対し、 $S_n^{s,b}$ は正規 (= 局所的に整閉整域) である。

注意

$S_n^{s,b}$ の正規性自体は F. Andreatta⁵によって示されている。

⁴J. Amer. Math. Soc. **1**, (1988), 255–299. Astérisque **279**, (2002), 185–270.

⁵Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **39**, (2006), 599–647.