

パーフェクトイド塔における Fontaine のモノイダル 写像

林 和輝
(東京科学大学)

第 22 回数学総合若手研究集会 (於 北海道大学)

2026 年 3 月 7 日

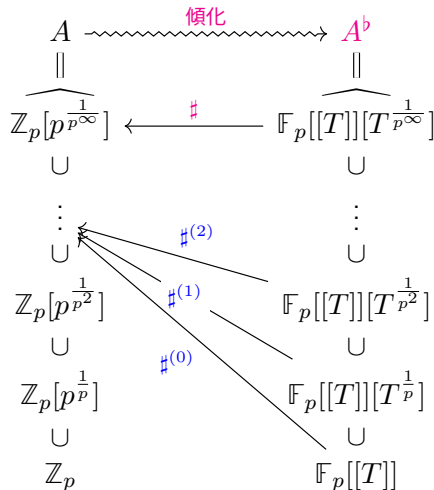
本講演は伊城慎之介氏 (群馬工高専) と下元数馬氏 (東京科学大) との共同研究

- ▶ K. Hayashi, S. Ishiro, K. Shimomoto, *An application of Fontaine's monoidal maps to perfectoid towers*, arXiv:2602.21605.

に基づく。

パーフェクトイド環

パーフェクトイド塔



1. パーフェクトイド環と Fontaine の写像
2. パーフェクトイド塔と Fontaine の写像

1. パーフェクトイド環と Fontaine の写像

2. パーフェクトイド塔と Fontaine の写像

パーフェクトイド環

- ▶ $\mathbb{F}_p$ 代数が完全 (perfect) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ Frobenius 写像 $x \mapsto x^p$ が全単射。

パーフェクトイド環

▶ $\mathbb{F}_p$ 代数が完全 (perfect) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ Frobenius 写像 $x \mapsto x^p$ が全単射。

定義 (Bhatt–Morrow–Scholze, Gabber–Ramero)

環 A がパーフェクトイドであるとは、次を満たす元 ϖ を含むときをいう。

1. $p \in \varpi^p A$ であり、かつ、 A は ϖ 進完備である。
2. $A/\varpi^p A$ 上の Frobenius は $A/\varpi A \xrightarrow{\cong} A/\varpi^p A$ を誘導する。
3. $A_{\varpi\text{-tor}} \rightarrow A_{\varpi\text{-tor}}; x \mapsto x^p$ は全単射である。

パーフェクトイド環

▶ $\mathbb{F}_p$ 代数が完全 (perfect) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ Frobenius 写像 $x \mapsto x^p$ が全単射。

定義 (Bhatt–Morrow–Scholze, Gabber–Ramero)

環 A がパーフェクトイドであるとは、次を満たす元 ϖ を含むときをいう。

1. $p \in \varpi^p A$ であり、かつ、 A は ϖ 進完備である。
2. $A/\varpi^p A$ 上の Frobenius は $A/\varpi A \xrightarrow{\cong} A/\varpi^p A$ を誘導する。
3. $A_{\varpi\text{-tor}} \rightarrow A_{\varpi\text{-tor}}; x \mapsto x^p$ は全単射である。

例

1. $\mathbb{F}_p$ 代数 A がパーフェクトイド $\iff A$ が完全。
2. $R = W(k)[[x_1, \dots, x_d]]/(p - f)$: 混標数 $(0, p)$ の完備正則局所環

$$W(k)[x_1^{\frac{1}{p^\infty}}, \dots, x_d^{\frac{1}{p^\infty}}]/(p - f)$$

の p 進完備化はパーフェクトイド環。

傾化 (tilt) と Fontaine のモノイダル写像

以下、 A : パーフェクトイド環 ($\not\cong \mathbb{F}_p$).

$$A^{\flat} \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim (A/pA \xleftarrow{\text{Frob}} A/pA \xleftarrow{\text{Frob}} \cdots)$$

を A の傾化と呼ぶ。これは完全 $\mathbb{F}_p$ 代数になる。

$$A = \widehat{\mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^\infty}}]} \rightsquigarrow A^{\flat} = \widehat{\mathbb{F}_p[[T]][T^{\frac{1}{p^\infty}}]}.$$

傾化 (tilt) と Fontaine のモノイダル写像

以下、 A : パーフェクトイド環 ($\not\cong \mathbb{F}_p$).

$$A^b \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim (A/pA \xleftarrow{\text{Frob}} A/pA \xleftarrow{\text{Frob}} \cdots)$$

を A の傾化と呼ぶ。これは完全 $\mathbb{F}_p$ 代数になる。

$$A = \widehat{\mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^\infty}}]} \rightsquigarrow A^b = \widehat{\mathbb{F}_p[[T]][T^{\frac{1}{p^\infty}}]}.$$

命題-定義 (Fontaine)

乗法的モノイドの同型

$$\varprojlim_{x \mapsto x^p} A \xrightarrow{\cong} \varprojlim_{\text{Frob}} A/pA = A^b$$

がある。これの逆写像と 0 番目の射影の合成を $\sharp$ と書く：

$$\sharp: A^b \rightarrow A$$

命題

$\varpi^b \in A^b$: 単元倍を除いて $(\varpi^b)^\# := \sharp(\varpi^b) = \varpi$ となる元

1. $A^b/(\varpi^b)^p A \xrightarrow{\cong} A/\varpi^p A.$
2. $(A^b)_{\varpi^b\text{-tor}} \xrightarrow{\cong} A_{\varpi\text{-tor}}.$

¹Tokyo J. Mathematics **47**, (2024), 395–409.

命題

$\varpi^b \in A^b$: 単元倍を除いて $(\varpi^b)^\sharp := \sharp(\varpi^b) = \varpi$ となる元

1. $A^b/(\varpi^b)^p A \xrightarrow{\cong} A/\varpi^p A.$
2. $(A^b)_{\varpi^b\text{-tor}} \xrightarrow{\cong} A_{\varpi\text{-tor}}.$

定理 (Scholze, Kedlaya–Liu, 衛藤–堀内–下元)¹

A : ϖ -torsion free. このとき

A が $A[\frac{1}{\varpi}]$ において完整閉 $\implies A^b$ が $A^b[\frac{1}{\varpi^b}]$ において完整閉。

▶ A が $A[\frac{1}{\varpi}]$ において**完整閉** $\iff x \in A[\frac{1}{\varpi}]$ が

$$\exists c > 0 \text{ s.t. } \varpi^c x^n \in A \text{ for all } n > 0$$

を満たすなら、 $x \in A$ である。(環の乗法的構造しか使わない！)

¹Tokyo J. Mathematics **47**, (2024), 395–409.

1. パーフェクトイド環と Fontaine の写像

2. パーフェクトイド塔と Fontaine の写像

パーフェクトイド塔 (Perfectoid towers)

R : $\mathbb{F}_p$ 上の整域 (より一般に、被約 $\mathbb{F}_p$ 代数)

$$R^{\frac{1}{p^n}} := \{x \in \overline{\text{Frac}(R)} \mid x^{p^n} \in R\} \quad (\forall n \geq 0)$$

パーフェクトイド塔 (Perfectoid towers)

R : $\mathbb{F}_p$ 上の整域 (より一般に、被約 $\mathbb{F}_p$ 代数)

$$R^{\frac{1}{p^n}} := \{x \in \overline{\text{Frac}(R)} \mid x^{p^n} \in R\} \quad (\forall n \geq 0)$$

1. $\bigcup_{n \geq 0} R^{\frac{1}{p^n}}$ は完全 $\mathbb{F}_p$ 代数 (= パーフェクトイド $\mathbb{F}_p$ 代数)。
2. $R \hookrightarrow R^{\frac{1}{p}} \hookrightarrow R^{\frac{1}{p^2}} \hookrightarrow \dots$ を完全塔と呼ぶ。

$$\begin{array}{ccc} R^{\frac{1}{p^{n+1}}} & \xrightarrow{\text{Frob}} & R^{\frac{1}{p^{n+1}}} \\ & \searrow \cong & \uparrow \\ & & R^{\frac{1}{p^n}} \end{array} \quad (\forall n \geq 0)$$

定義 (伊城-仲里-下元)²

$\{R_n\}_{n \geq 0} = (R_0 \xrightarrow{t_0} R_1 \xrightarrow{t_1} R_2 \xrightarrow{t_2} \cdots)$: 環の帰納系

$I_0 \subset R_0$: p を含む単項生成イデアル

$\{R_n\}_{n \geq 0}$ が (R_0, I_0) から生じるパーフェクトイド塔であるとは、次を満たす単項生成イデアル $I_1 \subset R_1$ が存在するときをいう。

1. $I_1^p = I_0 R_1$ であり、かつ、すべての R_n は I_0 進 Zariski 的である。
- 2.

$$\begin{array}{ccc}
 R_{n+1}/I_0 R_{n+1} & \xrightarrow{\text{Frob}} & R_{n+1}/I_0 R_{n+1} \\
 \downarrow & \searrow \text{---} F_n \text{---} & \uparrow \overline{t_i} \\
 R_{n+1}/I_1 R_{n+1} & \xrightarrow{\cong} & R_n/I_0 R_n
 \end{array} \quad (\forall n \geq 0)$$

3. F_n は全単射 $(R_{n+1})_{I_0\text{-tor}} \xrightarrow{\cong} (R_n)_{I_0\text{-tor}}$ を誘導する。

²Algebra Number Theory **19**(12), (2025), 2307–2358.

定義 (伊城-仲里-下元)²

$\{R_n\}_{n \geq 0} = (R_0 \xrightarrow{t_0} R_1 \xrightarrow{t_1} R_2 \xrightarrow{t_2} \cdots)$: 環の帰納系

$I_0 \subset R_0$: p を含む単項生成イデアル

$\{R_n\}_{n \geq 0}$ が (R_0, I_0) から生じるパーフェクトイド塔であるとは、次を満たす単項生成イデアル $I_1 \subset R_1$ が存在するときをいう。

1. $I_1^p = I_0 R_1$ であり、かつ、すべての R_n は I_0 進 Zariski 的である。
- 2.

$$\begin{array}{ccc}
 R_{n+1}/I_0 R_{n+1} & \xrightarrow{\text{Frob}} & R_{n+1}/I_0 R_{n+1} \\
 \downarrow & \searrow \text{---} F_n \text{---} & \uparrow \overline{t_i} \\
 R_{n+1}/I_1 R_{n+1} & \xrightarrow{\cong} & R_n/I_0 R_n
 \end{array} \quad (\forall n \geq 0)$$

3. F_n は全単射 $(R_{n+1})_{I_0\text{-tor}} \xrightarrow{\cong} (R_n)_{I_0\text{-tor}}$ を誘導する。

例

1. $(R_0, (0))$ から生じるパーフェクトイド塔 = 完全塔。

²Algebra Number Theory **19**(12), (2025), 2307–2358.

2. $R = W(k)[[x_1, \dots, x_d]]/(p - f)$: 混標数 $(0, p)$ の完備正則局所環

$$R_0 := R \hookrightarrow \dots \hookrightarrow R_n := R[x_1^{\frac{1}{p^n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{p^n}}] \hookrightarrow \dots$$

は $(R, (p))$ から生じるパーフェクトイド塔。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^{n+1}}}] / (p) & \xrightarrow{\text{Frob}} & \mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^{n+1}}}] / (p) \\ \downarrow \wr & \searrow \text{---} & \uparrow \\ \mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^{n+1}}}] / (p^{\frac{1}{p}}) & \xrightarrow[\cong]{\text{---}} & \mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^n}}] / (p) \end{array}$$

2. $R = W(k)[[x_1, \dots, x_d]]/(p - f)$: 混標数 $(0, p)$ の完備正則局所環

$$R_0 := R \hookrightarrow \dots \hookrightarrow R_n := R[x_1^{\frac{1}{p^n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{p^n}}] \hookrightarrow \dots$$

は $(R, (p))$ から生じるパーフェクトイド塔。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^{n+1}}}] / (p) & \xrightarrow{\text{Frob}} & \mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^{n+1}}}] / (p) \\ \downarrow \wr & \searrow \text{---} & \uparrow \\ \mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^{n+1}}}] / (p^{\frac{1}{p}}) & \xrightarrow[\cong]{\text{---}} & \mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^n}}] / (p) \end{array}$$

以下、 $\{R_n\}_{n \geq 0} : (R_0, I_0)$ から生じるパーフェクトイド塔

▶ $R_\infty := \varinjlim_{n \geq 0} R_n$ の I_0 進完備化 $\widehat{R_\infty}$ はパーフェクトイド環。

Small tilt と Fontaine のモノイダル写像

$$R_n^{s.b} \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim (R_n/I_0 R_n \xleftarrow{F_n} R_{n+1}/I_0 R_{n+1} \xleftarrow{F_{n+1}} \cdots)$$

を n 番目の **small tilt** と呼ぶ。 $\{R_n^{s.b}\}_{n \geq 0}$ は完全塔になる。

$$R_n = \mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^n}}] \rightsquigarrow R_n^{s.b} = \mathbb{F}_p[[T]][T^{\frac{1}{p^n}}].$$

Small tilt と Fontaine のモノイダル写像

$$R_n^{s,b} \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim (R_n/I_0 R_n \xleftarrow{F_n} R_{n+1}/I_0 R_{n+1} \xleftarrow{F_{n+1}} \cdots)$$

を n 番目の **small tilt** と呼ぶ。 $\{R_n^{s,b}\}_{n \geq 0}$ は完全塔になる。

$$R_n = \mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^n}}] \rightsquigarrow R_n^{s,b} = \mathbb{F}_p[[T]][T^{\frac{1}{p^n}}].$$

命題-定義 (H.-伊城-下元)

乗法的モノイドの同型

$$\varprojlim (R_n + I_0 \widehat{R_\infty} \xleftarrow{x^p \mapsto x} R_{n+1} + I_0 \widehat{R_\infty} \xleftarrow{x^p \mapsto x} \cdots) \xrightarrow{\cong} R_n^{s,b}$$

がある。これの逆写像と 0 番目の射影の合成を $\sharp^{(n)}$ と書く：

$$\sharp^{(n)}: R_n^{s,b} \rightarrow R_n + I_0 \widehat{R_\infty}$$

命題 (伊城-仲里-下元, H.-伊城-下元)

$$I_0^{s,b} := \text{Ker}(R_0^{s,b} \xrightarrow{\text{pr}_0} R_0/I_0).$$

1. $R_n^{s,b}/I_0^{s,b}R_n^{s,b} \xrightarrow{\cong} R_n/I_0R_n \ (\forall n \geq 0).$
2. $(R_n^{s,b})_{I_0^{s,b}\text{-tor}} \xrightarrow{\cong} (R_n)_{I_0\text{-tor}} \ (\forall n \geq 0).$

命題 (伊城-仲里-下元, H.-伊城-下元)

$$I_0^{s.b} := \text{Ker}(R_0^{s.b} \xrightarrow{\text{pr}_0} R_0/I_0).$$

1. $R_n^{s.b}/I_0^{s.b}R_n^{s.b} \xrightarrow{\cong} R_n/I_0R_n \ (\forall n \geq 0).$
2. $(R_n^{s.b})_{I_0^{s.b}\text{-tor}} \xrightarrow{\cong} (R_n)_{I_0\text{-tor}} \ (\forall n \geq 0).$

定理 (H.-伊城-下元)

R_0 : I_0 -torsion free, $I_0 = (f_0)$, $I_0^{s.b} = (f_0^{s.b})$. このとき

R_n : $R_n[\frac{1}{f_0}]$ において完全閉 $(\forall n) \implies R_n^{s.b}$: $R_n^{s.b}[\frac{1}{f_0^{s.b}}]$ において完全閉 $(\forall n)$

命題 (伊城-仲里-下元, H.-伊城-下元)

$$I_0^{s.b} := \text{Ker}(R_0^{s.b} \xrightarrow{\text{pr}_0} R_0/I_0).$$

1. $R_n^{s.b}/I_0^{s.b}R_n^{s.b} \xrightarrow{\cong} R_n/I_0R_n \ (\forall n \geq 0).$
2. $(R_n^{s.b})_{I_0^{s.b}\text{-tor}} \xrightarrow{\cong} (R_n)_{I_0\text{-tor}} \ (\forall n \geq 0).$

定理 (H.-伊城-下元)

R_0 : I_0 -torsion free, $I_0 = (f_0)$, $I_0^{s.b} = (f_0^{s.b})$. このとき

R_n : $R_n[\frac{1}{f_0}]$ において完全閉 $(\forall n) \implies R_n^{s.b}$: $R_n^{s.b}[\frac{1}{f_0^{s.b}}]$ において完全閉 $(\forall n)$

注意

R_n : ネーター環なら、完全閉性は**整閉性**と同値。

$\rightsquigarrow R_n$ の整閉性から $R_n^{s.b}$ の整閉性が帰結できないか？

G. Faltings³は p 進 Hodge 理論の文脈で以下のような状況を考えて。

- ▶ $R = W(k)[[x_2, \dots, x_d]]$.
- ▶ $R_n := R[p^{\frac{1}{p^n}}, x_2^{\frac{1}{p^n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{p^n}}] \ (\forall n \geq 0)$.
- ▶ $R \hookrightarrow S$: 正規局所整域の有限拡大 s.t. $R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}]$ はエタール。
- ▶ $S_n : R_n$ の $(R_n \otimes_R S)[\frac{1}{p}]$ における整閉包 $(\forall n \geq 0)$.

定理 (H.-伊城-下元)

1. ある有理数 $\varepsilon \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ と整数 $N \geq 0$ が存在し、 $\{S_n\}_{n \geq N}$ は $(S_N, (p^\varepsilon))$ から生じるパーフェクトイド塔となる。
2. $n \geq N$ に対し、 $S_n^{s.b.}$ は正規 (= 局所的に整閉整域) である。

注意

$S_n^{s.b.}$ の正規性自体は F. Andreatta⁴によって示されている。

³J. Amer. Math. Soc. **1**, (1988), 255-299. Astérisque **279**, (2002), 185-270.

⁴Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **39**, (2006), 599-647.