

パーフェクトイド理論と概純性定理について

林 和輝
(東京科学大学)

第 9 回 数理新人セミナー (於 名古屋大学)

2026 年 2 月 19 日

1. 導入
2. パーフェクトイド理論と概純性定理
3. パーフェクトイド塔に対する概純性定理へ向けて

1. 導入

2. パーフェクトイド理論と概純性定理

3. パーフェクトイド塔に対する概純性定理へ向けて

純性 (purity) とは

Hartogs の拡張定理

$U \subset \mathbb{C}^n$: (連結) 開集合 ($n \geq 2$)

$x \in U$, $f: U \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{C}$ 正則関数

$\implies f$ は U 上の正則関数に (一意に) 拡張できる。

$\rightsquigarrow$ 制限写像 $\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U \setminus \{x\})$ は同型。

$\rightsquigarrow$ **正則関数** は **余次元 $n \geq 2$** の閉集合を取り除いても変化しない。

純性 (purity) とは

Hartogs の拡張定理

$U \subset \mathbb{C}^n$: (連結) 開集合 ($n \geq 2$)

$x \in U, \quad f: U \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{C}$ 正則関数

$\implies f$ は U 上の正則関数に (一意に) 拡張できる。

$\rightsquigarrow$ 制限写像 $\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U \setminus \{x\})$ は同型。

$\rightsquigarrow$ **正則関数** は **余次元 $n \geq 2$** の閉集合を取り除いても変化しない。

Key notion

純性 (purity) $\cdots$ ある **不変量** が **十分大きな余次元** をもつ閉集合を取り除いても変化しないという現象

代数幾何/数論幾何における純性の例を見る。

Zariski–永田の純性定理 (purity of branch locus)¹

$f: X \rightarrow S$: 有限かつ支配的 s.t. S : 正則、 X : 正規整スキーム
 $\implies f$ の分岐軌跡は pure codimension one.

$\rightsquigarrow$ 不分岐軌跡は余次元 ≥ 2 の閉集合を取り除いても変化しない。

¹Proc. Natl. Acad. Sci. USA **44**(8), (1958), 791–796. loc. cit. 796–799.

²K. Fujiwara, Adv. Stud. Pure Math. **36**, (2002), 153–183.

Zariski–永田の純性定理 (purity of branch locus)¹

$f: X \rightarrow S$: 有限かつ支配的 s.t. S : 正則、 X : 正規整スキーム
 $\implies f$ の分岐軌跡は pure codimension one.

$\rightsquigarrow$ 不分岐軌跡は余次元 ≥ 2 の閉集合を取り除いても変化しない。

Gabber–Thomason の純性定理²

$i: Z \hookrightarrow X$: pure codimension c の正則スキームの閉埋め込み、
 $n \in \mathbb{Z}$: X で可逆、 $\Lambda := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. このとき、 Z 上のエタール層として

$$\mathcal{H}_Z^q(\Lambda) \cong \begin{cases} 0 & (q \neq 2c), \\ \underline{\Lambda}_Z(-c) & (q = 2c). \end{cases}$$

$\rightsquigarrow i_* Ri^! \Lambda \rightarrow \Lambda \rightarrow Rj_* j^{-1} \Lambda$ より $H_{\text{ét}}^{<2c-1}(X, \Lambda) \xrightarrow{\cong} H_{\text{ét}}^{<2c-1}(X \setminus Z, \Lambda)$.

$\rightsquigarrow$ エタールコホモロジーは十分大きな余次元をもつ閉集合を取り除いても変化しない。

¹Proc. Natl. Acad. Sci. USA **44**(8), (1958), 791–796. loc. cit. 796–799.

²K. Fujiwara, Adv. Stud. Pure Math. **36**, (2002), 153–183.

A. Grothendieck による定式化 (SGA2)

Recall: エタール = 不分岐 + 平坦

定義

スキーム X と閉部分スキーム $Z \subset X$ の組 (X, Z) が純 (pure) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\mathbf{F}\text{-}\mathbf{\acute{E}t}(X) \rightarrow \mathbf{F}\text{-}\mathbf{\acute{E}t}(U); \quad V \mapsto V \times_X U$$

が圏同値 ($U := X \setminus Z$).

Grothendieck–Zariski–永田の純性定理

$(R, \mathfrak{m})$: ネーター局所環

1. R が正則かつ Krull 次元 $\geq 2 \implies (\text{Spec } R, \{\mathfrak{m}\})$ は純。
2. R が完全交叉かつ Krull 次元 $\geq 3 \implies (\text{Spec } R, \{\mathfrak{m}\})$ は純。

1. 導入

2. パーフェクトイド理論と概純性定理

3. パーフェクトイド塔に対する概純性定理へ向けて

概可換環論 (almost ring theory) と純性定理

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ は p 進 Hodge 理論で基本的な対象である。

▶ イデアル $\mathfrak{m} = (p^{\frac{1}{p^\infty}}) = \bigcup_{n>0} (p^{\frac{1}{p^n}})$ は $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ を満たす。

³J. Amer. Math. Soc. **1**, (1988), 255–299.

概可換環論 (almost ring theory) と純性定理

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ は p 進 Hodge 理論 で基本的な対象である。

▶ イデアル $\mathfrak{m} = (p^{\frac{1}{p^\infty}}) = \bigcup_{n>0} (p^{\frac{1}{p^n}})$ は $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ を満たす。

定義 (G. Faltings)³

基本設定 とは、環 V とイデアル $\mathfrak{m}$ の組 $(V, \mathfrak{m})$ で $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ を満たすもの。

概可換環論 $\cdots$ $\mathfrak{m}$ -torsion を「無視する」(e.g., M が $\mathfrak{m}$ 概零 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathfrak{m}M = 0$).

³J. Amer. Math. Soc. **1**, (1988), 255–299.

概可換環論 (almost ring theory) と純性定理

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ は p 進 Hodge 理論 で基本的な対象である。

▶ イデアル $\mathfrak{m} = (p^{\frac{1}{p^\infty}}) = \bigcup_{n>0} (p^{\frac{1}{p^n}})$ は $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ を満たす。

定義 (G. Faltings)³

基本設定 とは、環 V とイデアル $\mathfrak{m}$ の組 $(V, \mathfrak{m})$ で $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ を満たすもの。

概可換環論 $\cdots$ $\mathfrak{m}$ -torsion を「無視する」(e.g., M が $\mathfrak{m}$ 概零 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathfrak{m}M = 0$)。

例

1. $\mathfrak{m} = V$ の場合、概可換環論 = 可換環論。
2. $W(k)$: 標数 $p > 0$ の完全体 k の Witt 環

$$R_\infty := \bigcup_{n \geq 0} R_n, \quad R_n := W(k)[p^{\frac{1}{p^n}}][[x_2^{\frac{1}{p^n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{p^n}}]]$$

$\implies (R_\infty, (p^{\frac{1}{p^\infty}}))$ は基本設定。

³J. Amer. Math. Soc. 1, (1988), 255–299.

概純性定理 (Faltings)⁴

$R := W(k)[[x_2, \dots, x_d]]$ (k : 標数 $p > 0$ の完全体)

$R \hookrightarrow S$: 正規局所整域の有限拡大で $R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}]$ はエタール

$S_n : R_n$ の $(R_n \otimes_R S)[\frac{1}{p}]$ における整閉包 ($n \geq 0$)

$\implies R_\infty \rightarrow S_\infty := \bigcup_{n \geq 0} S_n$ は $(p^{\frac{1}{p^\infty}})$ 概有限エタール。

定義 (Gabber–Ramero)⁵

基本設定 $(V, \mathfrak{m})$ に関して、スキーム X と閉部分スキーム $Z \subset X$ の組 (X, Z) が **m 概純** (**m-almost pure**) であるとは、関手

$$\mathbf{F}\text{-}\mathbf{\acute{E}t}^a(X) \rightarrow \mathbf{F}\text{-}\mathbf{\acute{E}t}^a(U); \quad V \mapsto V \times_X U$$

が圏同値であるときをいう ($U := X \setminus Z$).

► Faltings の概純性定理 $\rightsquigarrow (\mathrm{Spec} R_\infty, V(p))$ が $(p^{\frac{1}{p^\infty}})$ 概純。

⁴loc. cit. & Astérisque **279**, (2002), 185–270.

⁵*Almost rings and perfectoid spaces*, October 1, 2024. Release 8.

パーフェクトイド理論と概純性定理 (P. Scholze)

先程の環 $R_\infty = \bigcup_{n \geq 0} W(k)[p^{\frac{1}{p^n}}][[x_2^{\frac{1}{p^n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{p^n}}]]$ は次の性質をもつ。

▶ $R_\infty/(p)$ 上の Frobenius は $R_\infty/(p^{\frac{1}{p}}) \xrightarrow{\cong} R_\infty/(p)$ を誘導する。

このような性質をもつ環（の p 進完備化）をパーフェクトイド環という。

⁶Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **116**, (2012), 245–313.

⁷Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **127**, (2018), 71–93.

パーフェクトイド理論と概純性定理 (P. Scholze)

先程の環 $R_\infty = \bigcup_{n \geq 0} W(k)[p^{\frac{1}{p^n}}][[x_2^{\frac{1}{p^n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{p^n}}]]$ は次の性質をもつ。

▶ $R_\infty/(p)$ 上の Frobenius は $R_\infty/(p^{\frac{1}{p}}) \xrightarrow{\cong} R_\infty/(p)$ を誘導する。

このような性質をもつ環 (の p 進完備化) を **パーフェクトイド環** という。

概純性定理 (Scholze,⁶ Kedlaya–Liu)

A : パーフェクトイド環

$A[\frac{1}{p}] \hookrightarrow B'$: 有限エタール拡大

$B : B'$ における A の整閉包

$\implies \widehat{B}$ はパーフェクトイド、かつ、 $A \rightarrow B$ は $(p^{\frac{1}{p^\infty}})$ 概有限エタール。

⁶Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **116**, (2012), 245–313.

⁷Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **127**, (2018), 71–93.

パーフェクトイド理論と概純性定理 (P. Scholze)

先程の環 $R_\infty = \bigcup_{n \geq 0} W(k)[p^{\frac{1}{p^n}}][[x_2^{\frac{1}{p^n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{p^n}}]]$ は次の性質をもつ。

▶ $R_\infty/(p)$ 上の Frobenius は $R_\infty/(p^{\frac{1}{p}}) \xrightarrow{\cong} R_\infty/(p)$ を誘導する。

このような性質をもつ環 (の p 進完備化) を **パーフェクトイド環** という。

概純性定理 (Scholze,⁶ Kedlaya–Liu)

A : パーフェクトイド環

$A[\frac{1}{p}] \hookrightarrow B'$: 有限エタール拡大

$B : B'$ における A の整閉包

$\implies \widehat{B}$ はパーフェクトイド、かつ、 $A \rightarrow B$ は $(p^{\frac{1}{p^\infty}})$ 概有限エタール。

次の定理は **混標数の場合のみ** が長年未解決であった。

直和因子定理 (Hochster '73, André⁷)

正則環上の有限拡大 $R \hookrightarrow S$ は R 加群の分裂単射である。

⁶Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **116**, (2012), 245–313.

⁷Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **127**, (2018), 71–93.

直和因子定理の証明の概略 (B. Bhatt '14)

簡単のため、Faltings の設定で考える：

$$R = W(k)[[x_2, \dots, x_d]] \hookrightarrow S : \text{整域、} \quad R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}] : \text{エタール}$$

⁸Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **127**, (2018), 1–70.

直和因子定理の証明の概略 (B. Bhatt '14)

簡単のため、Faltings の設定で考える：

$R = W(k)[[x_2, \dots, x_d]] \hookrightarrow S$: 整域、 $R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}]$: エタール

WTS: $\xi := [0 \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow C \rightarrow 0] \in \mathrm{Ext}_R^1(C, R)$ がゼロ

⁸Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **127**, (2018), 1–70.

直和因子定理の証明の概略 (B. Bhatt '14)

簡単のため、Faltings の設定で考える：

$R = W(k)[[x_2, \dots, x_d]] \hookrightarrow S$: 整域、 $R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}]$: エタール

WTS: $\xi := [0 \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow C \rightarrow 0] \in \mathrm{Ext}_R^1(C, R)$ がゼロ

ETS: $\xi \otimes 1 \in \mathrm{Ext}_R^1(C, R) \otimes_R R_\infty$ がゼロ ($\because R \rightarrow R_\infty$ が忠実平坦)

⁸Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **127**, (2018), 1–70.

直和因子定理の証明の概略 (B. Bhatt '14)

簡単のため、Faltings の設定で考える：

$R = W(k)[[x_2, \dots, x_d]] \hookrightarrow S$: 整域、 $R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}]$: エタール

WTS: $\xi := [0 \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow C \rightarrow 0] \in \mathrm{Ext}_R^1(C, R)$ がゼロ

ETS: $\xi \otimes 1 \in \mathrm{Ext}_R^1(C, R) \otimes_R R_\infty$ がゼロ ($\because R \rightarrow R_\infty$ が忠実平坦)

$\xi_\infty := [0 \rightarrow R_\infty \rightarrow S_\infty \rightarrow C_\infty \rightarrow 0] \in \mathrm{Ext}_{R_\infty}^1(C_\infty, R_\infty)$ を考えると、
 $C \otimes_R R_\infty \rightarrow C_\infty$ から誘導される写像

$$\mathrm{Ext}_{R_\infty}^1(C_\infty, R_\infty) \rightarrow \mathrm{Ext}_{R_\infty}^1(C \otimes_R R_\infty, R_\infty) \cong \mathrm{Ext}_R^1(C, R) \otimes_R R_\infty$$

により $\xi_\infty \mapsto \xi \otimes 1$.

⁸Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **127**, (2018), 1–70.

直和因子定理の証明の概略 (B. Bhatt '14)

簡単のため、Faltings の設定で考える：

$R = W(k)[[x_2, \dots, x_d]] \hookrightarrow S$: 整域、 $R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}]$: エタール

WTS: $\xi := [0 \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow C \rightarrow 0] \in \text{Ext}_R^1(C, R)$ がゼロ

ETS: $\xi \otimes 1 \in \text{Ext}_R^1(C, R) \otimes_R R_\infty$ がゼロ ($\because R \rightarrow R_\infty$ が忠実平坦)

$\xi_\infty := [0 \rightarrow R_\infty \rightarrow S_\infty \rightarrow C_\infty \rightarrow 0] \in \text{Ext}_{R_\infty}^1(C_\infty, R_\infty)$ を考えると、
 $C \otimes_R R_\infty \rightarrow C_\infty$ から誘導される写像

$$\text{Ext}_{R_\infty}^1(C_\infty, R_\infty) \rightarrow \text{Ext}_{R_\infty}^1(C \otimes_R R_\infty, R_\infty) \cong \text{Ext}_R^1(C, R) \otimes_R R_\infty$$

により $\xi_\infty \mapsto \xi \otimes 1$. ここで**概純性定理より** $R_\infty \rightarrow S_\infty$ が概エタールであることから C_∞ は**概射影的**.

⁸Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **127**, (2018), 1–70.

直和因子定理の証明の概略 (B. Bhatt '14)

簡単のため、Faltings の設定で考える：

$R = W(k)[[x_2, \dots, x_d]] \hookrightarrow S$: 整域、 $R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}]$: エタール

WTS: $\xi := [0 \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow C \rightarrow 0] \in \text{Ext}_R^1(C, R)$ がゼロ

ETS: $\xi \otimes 1 \in \text{Ext}_R^1(C, R) \otimes_R R_\infty$ がゼロ ($\because R \rightarrow R_\infty$ が忠実平坦)

$\xi_\infty := [0 \rightarrow R_\infty \rightarrow S_\infty \rightarrow C_\infty \rightarrow 0] \in \text{Ext}_{R_\infty}^1(C_\infty, R_\infty)$ を考えると、
 $C \otimes_R R_\infty \rightarrow C_\infty$ から誘導される写像

$$\text{Ext}_{R_\infty}^1(C_\infty, R_\infty) \rightarrow \text{Ext}_{R_\infty}^1(C \otimes_R R_\infty, R_\infty) \cong \text{Ext}_R^1(C, R) \otimes_R R_\infty$$

により $\xi_\infty \mapsto \xi \otimes 1$. ここで**概純性定理より** $R_\infty \rightarrow S_\infty$ が概エタールであることから C_∞ は**概射影的**. よって $\text{Ext}_{R_\infty}^1(C_\infty, R_\infty)$ は概零。したがって $R_\infty \cdot (\xi \otimes 1)$ も概零。このとき $R_\infty \cdot (\xi \otimes 1) = 0$.

⁸Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **127**, (2018), 1–70.

直和因子定理の証明の概略 (B. Bhatt '14)

簡単のため、Faltings の設定で考える：

$R = W(k)[[x_2, \dots, x_d]] \hookrightarrow S$: 整域、 $R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}]$: エタール

WTS: $\xi := [0 \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow C \rightarrow 0] \in \text{Ext}_R^1(C, R)$ がゼロ

ETS: $\xi \otimes 1 \in \text{Ext}_R^1(C, R) \otimes_R R_\infty$ がゼロ ($\because R \rightarrow R_\infty$ が忠実平坦)

$\xi_\infty := [0 \rightarrow R_\infty \rightarrow S_\infty \rightarrow C_\infty \rightarrow 0] \in \text{Ext}_{R_\infty}^1(C_\infty, R_\infty)$ を考えると、
 $C \otimes_R R_\infty \rightarrow C_\infty$ から誘導される写像

$$\text{Ext}_{R_\infty}^1(C_\infty, R_\infty) \rightarrow \text{Ext}_{R_\infty}^1(C \otimes_R R_\infty, R_\infty) \cong \text{Ext}_R^1(C, R) \otimes_R R_\infty$$

により $\xi_\infty \mapsto \xi \otimes 1$. ここで**概純性定理より** $R_\infty \rightarrow S_\infty$ が概エタールであることから C_∞ は**概射影的**. よって $\text{Ext}_{R_\infty}^1(C_\infty, R_\infty)$ は概零。したがって $R_\infty \cdot (\xi \otimes 1)$ も概零。このとき $R_\infty \cdot (\xi \otimes 1) = 0$.

▶ 一般には、ある $g \in R \setminus \{0\}$ に対し $R[\frac{1}{pg}] \hookrightarrow S[\frac{1}{pg}]$ がエタール。

André は概純性定理をこの場合まで拡張した (**パーフェクトイド Abhyankar 補題**)。⁸

⁸Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **127**, (2018), 1–70.

1. 導入

2. パーフェクトイド理論と概純性定理

3. パーフェクトイド塔に対する概純性定理へ向けて

パーフェクトイド塔 (伊城-仲里-下元)⁹

パーフェクトイド環の欠点

A : パーフェクトイド環 ($\not\supset \mathbb{F}_p$)

$\implies p^{1/p}, p^{1/p^2}, \dots \in A \quad \therefore A \text{ は非ネーター環!}$

⁹Algebra Number Theory **19**(12), (2025), 2307–2358.

パーフェクトイド塔 (伊城-仲里-下元)⁹

パーフェクトイド環の欠点

A : パーフェクトイド環 ($\not\supset \mathbb{F}_p$)

$\implies p^{1/p}, p^{1/p^2}, \dots \in A \quad \therefore A \text{ は非ネーター環!}$

パーフェクトイド塔 $\cdots$ パーフェクトイド環を近似する (ネーター) 環の拡大列 $\{R_n\}_{n \geq 0} = (R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow \cdots \rightarrow R_n \rightarrow \cdots)$.

▶ $R_\infty := \varinjlim_{n \geq 0} R_n$ (の p 進完備化) はパーフェクトイド環。

⁹Algebra Number Theory **19**(12), (2025), 2307–2358.

パーフェクトイド塔 (伊城-仲里-下元)⁹

パーフェクトイド環の欠点

A : パーフェクトイド環 ($\not\cong \mathbb{F}_p$)

$\implies p^{1/p}, p^{1/p^2}, \dots \in A \quad \therefore A$ は**非ネーター環** !

パーフェクトイド塔 $\cdots$ パーフェクトイド環を近似する (ネーター) 環の
拡大列 $\{R_n\}_{n \geq 0} = (R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow \cdots \rightarrow R_n \rightarrow \cdots)$.

▶ $R_\infty := \varinjlim_{n \geq 0} R_n$ (の p 進完備化) はパーフェクトイド環。

例

$$R_0 := W(k)[[x_2, \dots, x_d]] \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow R_n := W(k)[p^{\frac{1}{p^n}}][[x_2^{\frac{1}{p^n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{p^n}}]] \hookrightarrow \cdots$$

はパーフェクトイド塔。 $\widehat{R_\infty}$ はパーフェクトイド環。

⁹Algebra Number Theory **19**(12), (2025), 2307–2358.

パーフェクトイド塔に対する概純性定理へ向けて

まずは Faltings の設定で：

- ▶ $R = W(k)[[x_2, \dots, x_d]]$ (k : 標数 $p > 0$ の完全体)
- ▶ $R \hookrightarrow S$: 正規局所整域の有限拡大で $R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}]$ はエタール
- ▶ $S_n : R_n$ の $(R_n \otimes_R S)[\frac{1}{p}]$ における整閉包 ($n \geq 0$)

¹⁰*An application of Fontaine's monoidal map to perfectoid towers, in preparation.*

パーフェクトイド塔に対する概純性定理へ向けて

まずは Faltings の設定で：

- ▶ $R = W(k)[[x_2, \dots, x_d]]$ (k : 標数 $p > 0$ の完全体)
- ▶ $R \hookrightarrow S$: 正規局所整域の有限拡大で $R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}]$ はエタール
- ▶ $S_n : R_n$ の $(R_n \otimes_R S)[\frac{1}{p}]$ における整閉包 ($n \geq 0$)

概純性定理 (Faltings, Scholze) の証明における最も本質的な部分

$S_\infty := \bigcup_{n \geq 0} S_n$ (の p 進完備化) はパーフェクトイド環。

¹⁰An application of Fontaine's monoidal map to perfectoid towers, in preparation.

パーフェクトイド塔に対する概純性定理へ向けて

まずは Faltings の設定で：

- ▶ $R = W(k)[[x_2, \dots, x_d]]$ (k : 標数 $p > 0$ の完全体)
- ▶ $R \hookrightarrow S$: 正規局所整域の有限拡大で $R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}]$ はエタール
- ▶ $S_n : R_n$ の $(R_n \otimes_R S)[\frac{1}{p}]$ における整閉包 ($n \geq 0$)

概純性定理 (Faltings, Scholze) の証明における最も本質的な部分

$S_\infty := \bigcup_{n \geq 0} S_n$ (の p 進完備化) はパーフェクトイド環。

定理 (H.-伊城-下元)¹⁰

ある有理数 $\varepsilon \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ と整数 $N \geq 0$ が存在し、 $\{S_n\}_{n \geq N}$ は $(S_N, (p^\varepsilon))$ から生じるパーフェクトイド塔となる。

¹⁰An application of Fontaine's monoidal map to perfectoid towers, in preparation.

パーフェクトイド塔に対する概純性定理へ向けて

まずは Faltings の設定で：

- ▶ $R = W(k)[[x_2, \dots, x_d]]$ (k : 標数 $p > 0$ の完全体)
- ▶ $R \hookrightarrow S$: 正規局所整域の有限拡大で $R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}]$ はエタール
- ▶ $S_n : R_n$ の $(R_n \otimes_R S)[\frac{1}{p}]$ における整閉包 ($n \geq 0$)

概純性定理 (Faltings, Scholze) の証明における最も本質的な部分

$S_\infty := \bigcup_{n \geq 0} S_n$ (の p 進完備化) はパーフェクトイド環。

定理 (H.-伊城-下元)¹⁰

ある有理数 $\varepsilon \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ と整数 $N \geq 0$ が存在し、 $\{S_n\}_{n \geq N}$ は $(S_N, (p^\varepsilon))$ から生じるパーフェクトイド塔となる。

問題

塔に対する概エタール性とは？ 塔に対する概純性定理とその応用は？

¹⁰An application of Fontaine's monoidal map to perfectoid towers, in preparation.