

パーフェクトイド環とその可換環論における応用について

林 和輝

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

2024 年 2 月 16 日

① 導入

② パーフェクトイド環

③ パーフェクトイド環の応用

- Big Cohen-Macaulay 予想
- パーフェクトイドタワー
- Kunz の定理

- 環といえば単位元をもつ**可換環**のこととする.
- p は (固定された) 素数を表す.
- $\mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} : p$ 進整数環.
- $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

① 導入

② パーフェクトイド環

③ パーフェクトイド環の応用

- Big Cohen-Macaulay 予想
- パーフェクトイドタワー
- Kunz の定理

局所環の標数

局所環 $R = (R, \mathfrak{m}_R)$ の**標数**は次の 4 パターンある.

	R の標数	$R/\mathfrak{m}_R$ の標数	例
等標数 0	0	0	$\mathbb{C}[[x]]$
等標数 p	p	p	$\mathbb{F}_p[[x]]$
混標数 $(0, p)$	0	p	$\mathbb{Z}_p$
混標数 (p^n, p)	p^n	p	$\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p$

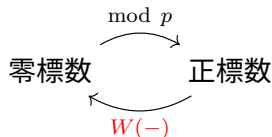
- R が**等標数** $\iff R$ が体を含む…**代数幾何**の対象に多い.
 - R が等標数 0 $\iff \mathbb{Q} \hookrightarrow R$.
 - R が等標数 p $\iff \mathbb{F}_p \hookrightarrow R$.
- **混標数**の環…**整数論**の対象に多い.
- R が整域ならば, 混標数 (p^n, p) にはならない.

標数による違い

零標数の世界と正標数の世界とでは異なる現象が現れ得る.

- 零標数…微積分を利用した**解析的手法**が役立つ.
- 正標数…**Frobenius 射**が重要な役割を果たす.

一方から他方へ帰着させる方法の 1 つとして, modulo p と **Witt 環**がある.



例

- ① $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{F}_p.$
- ② $W(\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}_p.$

次に見るように, 混標数の場合は一般に難しいことが多い.

混標数の難しさ –直和因子予想–

次の主張は 1960 年代後半に Hochster によって予想として提唱された。

定理 (直和因子定理)

R を正則環, $R \hookrightarrow S$ を有限拡大とする (e.g., $\mathbb{C}[x] \hookrightarrow \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3)$). このとき $R \hookrightarrow S$ は R 加群の準同型写像として分裂する。

- 零標数の場合…体論におけるトレース射を使う (比較的簡単)
- 正標数の場合…Frobenius 射を使って**単項式定理**を経由 (Hochster)
- 混標数の場合
 - $\dim R \leq 2$ の場合は簡単 (正規 $\Rightarrow$ CM だから)
 - (2002 年) Heitmann [?] によって $\dim R = 3$ の場合 (概可換環論の考え方)
 - (2016 年) André ([And18a], [And18b]) により一般の場合 (概可換環論とパーフェクトイド幾何学)

パーフェクトイド幾何学とは

Scholze [Sch12] が混標数の問題を正標数に帰着させる手法として導入.

$(-)^{\flat}$: 混標数 $\xrightarrow{\text{tilt}}$ 正標数

例

$$K = \widehat{\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})} \rightsquigarrow K^{\flat} = \widehat{\mathbb{F}_p((T))}.$$

- [Sch12] の目標はパーフェクトイド体 K 上の幾何学.

① 導入

② パーフェクトイド環

③ パーフェクトイド環の応用

- Big Cohen-Macaulay 予想
- パーフェクトイドタワー
- Kunz の定理

定義

パーフェクトイドの概念は少しずつバージョンアップされた.

- ① (Scholze [Sch12].) 幾何学的対象として導入.
- ② (Fontaine [Fon13].) Banach 環の枠組みへの一般化.
- ③ (Bhatt–Morrow–Scholze [BMS18].) 一般の環の枠組みへの一般化.

今は [BMS18] のものが主流.

環 S に対し, その **tilt** が次の $\mathbb{F}_p$ 代数として定義される.

$$S^{\flat} \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim (S/pS \xleftarrow{\text{Frob}} S/pS \xleftarrow{\text{Frob}} S/pS \xleftarrow{\text{Frob}} \cdots)$$

定義 ([BMS18, Definition 3.5])

次の条件を満たす環 S を**パーフェクトイド環**という.

- ① ある $\pi \in S$ が存在して, $p \in \pi^p S$ かつ S は π 進完備 ($\Rightarrow p$ 進完備).
- ② S/pS 上の Frobenius 写像 $\varphi: S/pS \rightarrow S/pS$ は全射である.
- ③ Fontaine の theta map $\theta: W(S^{\flat}) \rightarrow S$ の核が単項生成.

簡単な特徴づけ

伊城-仲里-下元 (Gabber-Ramero) による簡単な特徴づけがある.

定理 ([GR22, 16.3.75], [INS23, Theorem 3.52])

環 S がパーフェクトイドであることと, 次の条件を満たすような $\pi \in S$ が存在することは同値である.

- ① $p \in \pi^p S$ かつ S は π 進完備.
 - ② $S/\pi^p S$ 上の Frobenius 写像は全単射 $S/\pi S \xrightarrow{\sim} S/\pi^p S$ を誘導する.
 - ③ $S_{\pi\text{-tor}} = \{x \in S \mid \exists n > 0 \text{ s.t. } \pi^n x = 0\}$ 上の p 乗写像は全単射.
- S が p -torsion free (i.e., $S_{p\text{-tor}} = 0$; e.g., 整域) なら最後の条件は不要.

例 1 (完全 $\mathbb{F}_p$ 代数と絶対整閉包)

標数 p の体 K が**完全** $\iff K^p = K$.

定義

$\mathbb{F}_p$ 代数 S が**完全** (perfect) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ **Frobenius 射** $\varphi_S: S \rightarrow S; s \mapsto s^p$ が同型.

例

$\mathbb{F}_p$ 代数 S がパーフェクトイド $\iff S$ が完全.

したがって, パーフェクトイド環は完全 $\mathbb{F}_p$ 代数の一般化である.

例

混標数 $(0, p)$ の整域 S の**絶対整閉包** S^+ (i.e., S の商体 K の代数閉包 $\overline{K}$ における S の整閉包) の p 進完備化はパーフェクトイド環.

例2 (正則局所環に付随するパーフェクトイド環)

R を混標数 $(0, p)$ の完備正則局所環で $k := R/\mathfrak{m}_R$ は完全であるとする。
このとき以下の2通りが起こる (Cohen の構造定理)。

- ① $p \notin \mathfrak{m}_R^2$ (**不分岐**), $R \cong W(k)[[x_2, \dots, x_d]]$.
- ② $p \in \mathfrak{m}_R^2$ (**分岐**), $R \cong W(k)[[x_1, \dots, x_d]]/(p - \exists f)$.

$$R_\infty := \bigcup_{n \geq 0} R_n, \quad R_n := \begin{cases} W(k)[p^{1/p^n}][[x_2^{1/p^n}, \dots, x_d^{1/p^n}]] \\ W(k)[[x_1^{1/p^n}, \dots, x_d^{1/p^n}]]/(p - f) \end{cases}$$

$\Rightarrow R_\infty$ の p 進完備化 $\widehat{R_\infty}$ はパーフェクトイド環 (下元 [Shi16]).

例

- ① $R := \mathbb{Z}_p \Rightarrow R_\infty = \mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}] = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{Z}_p[p^{1/p^n}]$.
- ② $R := \mathbb{Z}_p[[x, y]]/(p - xy) \Rightarrow R_\infty = \bigcup_{n \geq 0} R[x^{\frac{1}{p^n}}, y^{\frac{1}{p^n}}], \pi = x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{p}}$.
- ③ $R := \mathbb{Z}_p[[x, y]]/(p - x^2 - y^2) \Rightarrow R_\infty = \bigcup_{n \geq 0} R[x^{\frac{1}{p^n}}, y^{\frac{1}{p^n}}], \pi = x^{\frac{2}{p}} + y^{\frac{2}{p}}$.

① 導入

② パーフェクトイド環

③ パーフェクトイド環の応用

- Big Cohen-Macaulay 予想
- パーフェクトイドタワー
- Kunz の定理

① 導入

② パーフェクトイド環

③ パーフェクトイド環の応用

- Big Cohen-Macaulay 予想
- パーフェクトイドタワー
- Kunz の定理

Big Cohen-Macaulay 予想の解決

André は **パーフェクトイド** Abhyankar の補題 [And18b] を使って直和因子予想を解決した.

同時に **big Cohen-Macaulay 予想** も解決した [And18a].

定理 (Big Cohen-Macaulay 定理)

任意のネーター局所環は *big Cohen-Macaulay* 代数を持つ.

- Cohen-Macaulay…超曲面特異点を含むある種の特異点のクラス.
- **Big**…有限生成とは限らない.
- 直和因子予想を含む **ホモロジカル予想** の多くが big CM 予想から従う.

① 導入

② パーフェクトイド環

③ パーフェクトイド環の応用

- Big Cohen-Macaulay 予想
- パーフェクトイドタワー
- Kunz の定理

パーフェクトイド環は大きすぎるため、ネーター環の理論が使えない。

観察

ネーター環の**タワー**を構成（ネーター環で近似）することが多い。

- $\mathbb{F}_p$ 代数 R の**完全閉包** $R_{\text{perf}} := \varinjlim (R \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{\varphi} \cdots)$.
- $\mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}] = \varinjlim (\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[1/p] \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[1/p^2] \hookrightarrow \cdots)$.

パーフェクトイドタワー…このような**タワー**を一般化したもの。

- 伊城-仲里-下元らによって導入された。

定義 ([INS23, Definition 3.22])

パーフェクトイドタワーとは, 環の順系

$$R_0 \xrightarrow{t_0} R_1 \xrightarrow{t_1} R_2 \xrightarrow{t_2} \cdots$$

とイデアル $I_0 \subset R_0$ の組で次の公理をみたすもの (②以下は $\forall i \geq 0$).

- ① $p \in I_0$.
- ② $\bar{t}_i: R_i/I_0R_i \rightarrow R_{i+1}/I_0R_{i+1}$ は単射.
- ③ $\text{Im}(\varphi_{R_{i+1}/I_0R_{i+1}}) \subset \text{Im}(\bar{t}_i)$.
- ④ $\varphi_{R_{i+1}/I_0R_{i+1}}$ が誘導する $F_i: R_{i+1}/I_0R_{i+1} \rightarrow R_i/I_0R_i$ は全射.
- ⑤ R_i は I_0 進 Zariskian.
- ⑥ I_0 : 単項, $\exists I_1 \subset R_1$: 単項 s.t. $I_1^p = I_0R_1$, $\text{Ker}(F_i) = I_1(R_{i+1}/I_0R_{i+1})$.
- ⑦ $I_0(R_i)_{I_0\text{-tor}} = (0)$ かつ $F_i|_{(R_{i+1})_{I_0\text{-tor}}}: (R_{i+1})_{I_0\text{-tor}} \xrightarrow{\sim} (R_i)_{I_0\text{-tor}}$.

パーフェクトイドタワーの例

- ① 被約 $\mathbb{F}_p$ 代数 R から作られるパーフェクトタワー ($I_0 = (0)$).
 - $R \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{\varphi} \dots$
- ② 完備正則局所環から作られるもの ($I_0 = (p)$).
 - $\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[p^{1/p}] \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[p^{1/p^2}] \hookrightarrow \dots$
- ③ 完備局所 log 正則環から作られるもの ($I_0 = (p)$).
 - $\mathbb{Z}_p[[\mathcal{Q} \oplus \mathbb{N}^r]] \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[[\frac{1}{p}(\mathcal{Q} \oplus \mathbb{N}^r)]] \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[[\frac{1}{p^2}(\mathcal{Q} \oplus \mathbb{N}^r)]]$.
 - $\mathcal{Q} = 0$ とすれば②.
 - 因子類群への応用において重要な例.

定理 ([INS23, Corollary 3.54])

$R_\infty := \varinjlim_{i \geq 0} R_i$ の I_0 進完備化 $\widehat{R_\infty}$ はパーフェクトイド.

パーフェクトイドタワーの tilting

定理 ([INS23, Definition 3.31, Theorem 3.37, Lemma 3.41])

パーフェクトイドタワー $R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow \cdots$ の *small tilt*

$$R_0^{s,b} \rightarrow R_1^{s,b} \rightarrow R_2^{s,b} \rightarrow \cdots, \quad I_0^{s,b} \subset R_0^{s,b}$$

について, 任意の $i \geq 0$ に対し

- ① $R_i^{s,b} / I_0^{s,b} R_i^{s,b} \xrightarrow{\sim} R_i / I_0 R_i.$
- ② $(R_i^{s,b})_{I_0^{s,b}\text{-tor}} \cong (R_i)_{p\text{-tor}}.$

- R_i がネーター環なら $R_i^{s,b}$ もそう.
- small...ネーター.
- $I_0 = (f_0)$, $I_0^{s,b} = (f_0^{s,b})$ とすれば①&②は次を意味する.

$$H_q(f_0^{s,b}; R_i^{s,b}) \xrightarrow{\sim} H_q(f_0; R_i) \quad \forall q \geq 0.$$

① 導入

② パーフェクトイド環

③ パーフェクトイド環の応用

- Big Cohen-Macaulay 予想
- パーフェクトイドタワー
- Kunz の定理

Kunz の定理

定理 ([Kun69, Theorem 2.1, Corollary 2.4])

ネーター $\mathbb{F}_p$ 代数 R が正則 $\iff \varphi_R: R \rightarrow R$ が (忠実) 平坦.

これは正標数の特異点論の出発点として基本的である:

系 ([Kun76, Theorem 2.5])

Frobenius 射が有限射であるようなネーター $\mathbb{F}_p$ 代数 R は**優秀環**.

$\mathbb{F}_p$ 代数 R に対し, その**完全閉包** (perfect closure, (direct) perfection)

$$R_{\text{perf}} = \varinjlim (R \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{\varphi} \cdots)$$

は完全 $\mathbb{F}_p$ 代数である.

例

$$\mathbb{F}_p[x]_{\text{perf}} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{F}_p[x^{1/p^n}] = \mathbb{F}_p[x^{1/p^\infty}].$$

Kunz の定理の p 進類似

完全閉包を用いて Kunz の定理を再定式化できる.

定理 (Kunz)

ネーター $\mathbb{F}_p$ 代数 R について次は同値.

- ① R は正則.
- ② 完全 $\mathbb{F}_p$ 代数 R_{perf} への標準的射 $R \rightarrow R_{\text{perf}}$ は (忠実) 平坦.

Bhatt–Iyengar–Ma らはこの混標数版を証明した.

定理 ([BIM19, Theorem 4.7])

$p \in \text{rad}(R)$ であるようなネーター環 R について次は同値.

- ① R は正則.
 - ② パーフェクトイド環 A への忠実平坦射 $R \rightarrow A$ が存在する.
- ① $\Rightarrow$ ② : 適当な reduction の後, A を例 2 の $\widehat{R_\infty}$ と取る.

応用として, R_{perf} と R^+ を使った正則性の判定法が得られる.

定理 ([BIM19, Theorem 4.13], [Bha20])

次の条件のいずれかをみたす優秀局所整域 R は正則である.

- ① R は $\mathbb{F}_p$ 代数で, ある $i \geq 1$ に対し $\text{Tor}_i^R(R_{\text{perf}}, R/\mathfrak{m}_R) = 0$.
- ② R は $\mathbb{F}_p$ 代数で, ある $i \geq 1$ に対し $\text{Tor}_i^R(R^+, R/\mathfrak{m}_R) = 0$.
- ③ R は**混標数**で, ある $i \geq 1$ に対し $\text{Tor}_i^R(R^+, R/\mathfrak{m}_R) = 0$.

- ①と②は既に別の方法で示されていた [AL08].
- 零標数を含めた正則性の判定法が [MS20] で与えられている.

Prismatic な Kunz の定理

Frobenius 射の平坦性を使って環の正則性を特徴付けるという本来の Kunz の定理の一般化が石塚-仲里らによって示された.

定理 ([IN24, Corollary 5.10])

R を完備ネーター局所環で $k = R/\mathfrak{m}_R$ の標数は p であるとする. $\mathfrak{m}_R$ の極小生成系を取って得られる全射 $A := C(k)[[T_1, \dots, T_d]] \twoheadrightarrow R$ と完全プリズム (A, I) を考える. このとき次は同値.

- ① R は正則.
 - ② $\Delta_{R/A}$ の Frobenius 持ち上げ $\varphi: \Delta_{R/A} \rightarrow \varphi_{A,*}\Delta_{R/A}$ は忠実平坦.
- $\Delta_{R/A}$ は **prismatic complex** と呼ばれる animated δ - A 代数 (一般には導来 (p, I) 完備な A 加群のなす ∞ 圏のある可換代数対象).
 - Bhatt-Scholze [BS22] が導入した **prismatic cohomology** を使う.
 - φ は混標数における “Frobenius 射” と考えられる.

- ① 非ネーター環の理論も重要になる.
- ② 他の分野との結びつきが一層重要になる.
 - 導来代数幾何的な視点 (導来完備化, prismatic cohomology).
 - 関数解析的な視点 (Banach 環, Riemann の拡張定理).

下元先生による記事 [下 22] も参照.

- [AL08] Ian M. Aberbach and Jinjia Li.
Asymptotic vanishing conditions which force regularity in local rings of prime characteristic.
Math. Res. Lett., 15(4):815–820, 2008.
- [And18a] Yves André.
La conjecture du facteur direct.
Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., 127:71–93, 2018.
- [And18b] Yves André.
Le lemme d'Abhyankar perfectoid.
Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., 127:1–70, 2018.
- [Bha20] Bhargav Bhatt.
Cohen-macaulayness of absolute integral closures.
arXiv preprint arXiv:2008.08070, 2020.
- [BIM19] Bhargav Bhatt, Srikanth B. Iyengar, and Linquan Ma.
Regular rings and perfect(oid) algebras.
Communications in Algebra, 47(6):2367–2383, 2019.
- [BMS18] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze.
Integral p -adic hodge theory.
Publications mathématiques de l'IHÉS, 128(1):219–397, 2018.

参考文献 II

- [BS22] Bhargav Bhatt and Peter Scholze.
Prisms and prismatic cohomology.
Annals of Mathematics, 196(3):1135–1275, 2022.
- [Fon13] Jean-Marc Fontaine.
Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d'après Peter Scholze).
Number 352, pages Exp. No. 1057, x, 509–534. 2013.
Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposés 1043–1058.
- [GR22] Ofer Gabber and Lorenzo Ramero.
Almost rings and perfectoid spaces.
2022.
- [IN24] Ryo Ishizuka and Kei Nakazato.
Prismatic kunz's theorem, 2024.
- [INS23] Shinnosuke Ishiro, Kei Nakazato, and Kazuma Shimomoto.
Perfectoid towers and their tilts : with an application to the étale cohomology groups of local log-regular rings, 2023.
- [Kun69] Ernst Kunz.
Characterizations of Regular Local Rings of Characteristic p .
American Journal of Mathematics, 91(3):772–784, 1969.

- [Kun76] Ernst Kunz.
On Noetherian Rings of Characteristic p .
American Journal of Mathematics, 98(4):999–1013, 1976.
- [MS20] Linqun Ma and Karl Schwede.
A kunz-type characterization of regular rings via alterations.
Journal of Pure and Applied Algebra, 224(3):1124–1131, 2020.
- [Sch12] Peter Scholze.
Perfectoid Spaces.
Publications mathématiques de l’IHÉS, 116(1):245–313, 2012.
- [Shi16] Kazuma Shimomoto.
An application of the almost purity theorem to the homological conjectures.
Journal of Pure and Applied Algebra, 220(2):621–632, 2016.
- [下 22] 下元数馬.
パーフェクトイド空間とその直和因子への応用.
数学 *Journal of Pure and Applied Algebra*, 74(4):356–380, 2022.