

Sober 空間

林 和輝

2026 年 8 月 31 日

概要

スキームをはじめとする非 Hausdorff 空間を考える際にしばしば重要となる sober 空間についてまとめたノート。Sober 空間の定義に必要な既約空間の復習から始め、EGA I の改訂版 [EGA, I_{new}] の 0, §2.9 を参考にしながら、sober 化 (sobrification) の構成とその基本的な性質を理解することを目標とする。

目次

1	既約空間	1
2	Sober 空間	3
3	Sober 化 (sobrification)	5
付録 A	準同相写像	8

1 既約空間

位相空間 X が既約であるとは、以下の条件を満たすときをいう。

- (i) X は空でない。
- (ii) X は二つの真の閉集合の和集合として書けない。

この節では、既約空間について基本的な事実をまとめる。[BouAC, Chapter II, §4.1] および [GWI, (1.5)] が主な参考文献である。

命題 1.1 ([GWI, Proposition 1.15]). 空でない位相空間 X に対し、以下は同値となる。

- (1) X は既約である。
- (2) X の二つの空でない開集合の共通部分は空でない。
- (3) X の空でない開集合は X で稠密である。
- (4) X の空でない開集合は連結である^{*1}。
- (5) X の空でない開集合は既約である^{*2}。

証明. 次のようにして示す。

$$\begin{array}{ccccc} (1) & \iff & (2) & \iff & (4) \\ \uparrow & & \updownarrow & & \\ (5) & \iff & (3) & & \end{array}$$

^{*1} Bourbaki のように空集合も連結であるとするならば「空でない」という条件は不要。

^{*2} もちろん X の部分集合には相対位相を考える。

(1) $\Leftrightarrow$ (2): 補集合をとればよい。

(2) $\Leftrightarrow$ (3): 部分集合 $U \subset X$ が稠密であるとは、 U が X の空でない任意の交わることであった。このことから (2) $\Leftrightarrow$ (3) は明らかである。

(4) $\Rightarrow$ (2): 対偶を示す。空でない開集合 $U_1, U_2 \subset X$ で $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるものが存在すれば、 $U_1 \cup U_2 \subset X$ は空でない非連結な開集合である。

(2) $\Rightarrow$ (4): 対偶を示す。空でない非連結な開集合 $U \subset X$ が存在すれば、空でない開集合 $U_1, U_2 \subset U$ で $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ を満たすものがあり $U = U_1 \cup U_2$ と書ける。そして U_1, U_2 は X の開集合でもある。

(5) $\Rightarrow$ (1): 自明。

(3) $\Rightarrow$ (5): $U \subset X$ を空でない開集合とし、 U の空でない開集合 V が U で稠密であることを示す（このとき既に示した (3) $\Rightarrow$ (1) より U は既約となる）。 V は X の開集合でもあるから、(3) より X において稠密である。しかしこのとき V は U において稠密でもある: $\overline{V}^U = \overline{V}^X \cap U = X \cap U = U$. $\square$

例 1.2. 一点集合（位相は一意に定まる）は既約である。命題 1.1 の条件 (2) より、既約な Hausdorff 空間は一点集合しかない。

命題 1.3. X を位相空間とする。空でない部分集合 $Z \subset X$ に対し、以下は同値となる^{*3}。

(1) Z は既約である。

(2) 開集合 $U_1, U_2 \subset X$ が $U_1 \cap Z, U_2 \cap Z \neq \emptyset$ を満たすならば、 $U_1 \cap U_2 \cap Z \neq \emptyset$ となる。

(3) 閉集合 $F_1, F_2 \subset X$ が $Z \subset F_1 \cup F_2$ を満たすならば、 $Z \subset F_1$ または $Z \subset F_2$ となる。

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2): 命題 1.1 の条件 (2) と相対位相の定義から従う。

(2) $\Leftrightarrow$ (3): 補集合をとればよい。 $\square$

命題 1.4 ([BouAC, Chapter II, §4.1, Proposition 2], [GWI, Lemma 1.17]). X を位相空間、 $Y \subset X$ を部分集合とする。このとき、 Y が既約 $\iff$ 閉包 $\overline{Y}$ が既約。

証明. 命題 1.3 (2) の条件と、開集合 $U \subset X$ に対し「 $U \cap Y \neq \emptyset \iff U \cap \overline{Y} \neq \emptyset$ 」であることから従う。 $\square$

命題 1.5 ([BouAC, Chapter II, §4.1, Proposition 4], [GWI, Corollary 1.16]). X, Y を位相空間、 $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする。 $Z \subset X$ が既約部分集合なら、像 $f(Z)$ も既約である。

証明. $V_1, V_2 \subset f(Z)$ を空でない開集合とする。 $f^{-1}(V_1) \cap Z, f^{-1}(V_2) \cap Z \subset X$ は空でない開集合で、 X は既約だから、 $\emptyset \neq (f^{-1}(V_1) \cap Z) \cap (f^{-1}(V_2) \cap Z) = f^{-1}(V_1 \cap V_2) \cap Z$, したがって $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ である。 $\square$

命題 1.6 ([BouAC, Chapter II, §4.1, Proposition 7], [GWI, (1.5.1)]). X を位相空間、 $U \subset X$ を開集合とする。このとき次の全単射がある。

$$\{Y \subset U \text{ 既約閉}\} \xleftarrow{1:1} \{Z \subset X \text{ 既約閉で } Z \cap U \neq \emptyset\}$$

$$Y \longmapsto \overline{Y} \text{ (} X \text{ における閉包)}$$

$$Z \cap U \longleftarrow Z$$

証明. (Well-defined): まず $Y \subset U$ を既約閉集合とすると、命題 1.4 より $\overline{Y} \subset X$ は既約閉集合で、 $Y \cap U = Y \neq \emptyset$ より $\overline{Y} \cap U \neq \emptyset$ である。逆に、右から Z をとると、 $Z \cap U$ は Z の空でない開集合だから命題 1.1 (5) より既約であり、また U の閉集合である。

(左から取ってもとに戻るか): 既約閉集合 $Y \subset U$ をとると、 $\overline{Y} \cap U = \overline{Y}^U = Y$ である。

^{*3} [BouAC, Chapter II, §4.1, Proposition 1 の下] も [GWI, Lemma 1.17 の証明] も「 Z が空でない」という仮定が抜けている。

(右から取ってもとに戻るか): 右から Z をとると、 $Z \cap U$ は Z の空でない開集合だから命題 1.1 (3) より Z で稠密である。 $Z \subset X$ は閉集合だから、 $\overline{Z \cap U} = \overline{Z} \cap \overline{U}^Z = Z$ である。□

2 Sober 空間

位相空間 X と点 $x \in X$ に対し、命題 1.4 より $\overline{\{x\}}$ は既約閉集合である。Sober 空間は以下のように定義される。

定義 2.1. X を位相空間とする。

- (1) 閉集合 $Z \subset X$ に対し、点 $x \in Z$ が Z の生成点であるとは、 $Z = \overline{\{x\}}$ が成り立つときにいう。
- (2) X が sober であるとは、任意の既約閉集合がただ一つの生成点を持つときにいう。

次の命題より、sober 空間の定義における生成点の一意性は T_0 性に他ならない。

命題 2.2. 位相空間 X に対し、以下は同値となる。

- (1) X は T_0 である。すなわち、 X の異なる二点 $x \neq y$ に対し、一方の開近傍で他方を含まないものが存在する。
- (2) 任意の既約閉集合 $Z \subset X$ に対し、 Z の生成点は高々一つである。

したがって、 X が sober $\iff$ 「 X は T_0 であり、かつ、任意の既約閉集合が生成点を持つ」。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): 既約閉集合 $Z \subset X$ が異なる生成点 $x \neq y$ を持つと仮定して矛盾を導く。(1) より、 x の開近傍 U で y を含まないものがあるとしてよい。すると、 $x \in U$ より $Z \cap U \neq \emptyset$ であるが、 $y \notin U$ より $Z \cap U = \emptyset$ であるので矛盾。

(2) $\Rightarrow$ (1): $x \neq y$ を X の異なる二点とする。(2) より $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ である。一般性を失わず $\overline{\{x\}} \not\subset \overline{\{y\}}$ としてよい。 $z \in \overline{\{x\}} \setminus \overline{\{y\}}$ をとると、 $z \notin \overline{\{y\}}$ より、 z の開近傍 U で y を含まないものがある。このとき、 $z \in \overline{\{x\}}$ より $x \in U$ である。よって、 X は T_0 である。□

例 2.3. 既約な Hausdorff 空間は一点集合のみであったから (例 1.2)、Hausdorff 空間は sober である。したがって

$$T_2 (= \text{Hausdorff}) \implies \text{sober} \implies T_0$$

となる。一方で、 T_1 性と sober 性は比較できない。

(sober だが T_1 でない例): 可換環 A に対して、素イデアルからなるスペクトラム $\text{Spec } A$ は Zariski 位相に関して sober であるが^{*4}、 T_1 であるのは A の Krull 次元が 0 以下であることに同値である。

(T_1 だが sober でない例): [FKI, Exercise 0.2.1] を参考に、 X を無限集合として補有限位相を入れる ($Y \subset X$ が閉集合 $\iff Y = X$ または Y が有限集合)。このとき、任意の $x \in X$ に対し $\{x\}$ は閉集合なので、 X は T_1 である。しかし、 X は無限集合なので定義より既約であるが、 T_1 なので生成点を持たない。したがって、 X は sober でない。

注意 2.4 (Sober という名前について). “Sober” は “drunk” の反対語であり、「酔っていない、しらふの」という意味である。以下に述べるように、sober 空間という名称は、トポスの視点から認識される「点」と実際の点との間に食い違いがないことを、この日常語になぞらえたものと理解することができる^{*5}。

^{*4} 既約閉集合は極小素イデアル $\mathfrak{p} \subset A$ により $V(\mathfrak{p})$ という形をしており、 $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ が $V(\mathfrak{p})$ のただ一つの生成点である。

^{*5} 当然、これはあくまで筆者の考えに過ぎない。

位相空間 X に対して、 X 上の層のなす Grothendieck トポス $\text{Sh}(X)$ (spacial topos) が定まる。 X の点 x は連続写像 $1 \rightarrow X$ とみなすことができ、それによってトポスの点 $p_x: \text{Set} \simeq \text{Sh}(1) \rightarrow \text{Sh}(X)$ が誘導される。 X が sober であることは、 $\text{Sh}(X)$ の任意の点 $p: \text{Set} \rightarrow \text{Sh}(X)$ が (同型を除いて) ただ一つの $x \in X$ に対応する p_x として得られることと同値である (locale を用いて [SGL, Chapter IX, §9, Proposition 2] で示されている)。したがって、 X が sober でないことは、トポスの点のうち、それを表す実際の点が存在しないものがあるか、または異なる二点がトポスの視点から同じ点として認識されることを意味する。前者を「幻覚」、後者を「ものが重なって見えること」にたとえるなら、sober 空間では、見える点はすべて本当にそこにあり、点を見誤ることもない。この意味で、その空間は「酔っておらず、しらふである」と考えられる。

この対応は点だけでなく、射についても成り立つ。連続写像 $f: X \rightarrow Y$ は逆像と順像によりトポスの射 (geometric morphism) $\text{Sh}(f): \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Sh}(Y)$ を誘導する。位相空間の圏 Top の射集合に「 $f \leq g \iff f(x) \in \overline{g(x)} \ (\forall x \in X)$ 」で定まる順序を入れ、sober 空間のなす 2 充満部分圏 STop を考えると、擬関手

$$\text{Sh}: \text{STop} \rightarrow \text{Topos}$$

は 2 忠実充満、すなわち任意の sober 空間 X, Y に対して関手

$$\text{STop}(X, Y) \rightarrow \text{Topos}(\text{Sh}(X), \text{Sh}(Y))$$

は圏同値であることが示される ([SGA4-1, Exposé IV, 4.2.3])。

[FKI, Chapter 0, §2.1.(b)] で証明が読者に委ねられている命題を示しておく (命題 2.7 と 2.8)。

補題 2.5. X を位相空間、 $A \subset Y \subset X$ を部分集合とする。このとき、 A の Y における閉包の X における閉包は、 A の X における閉包に等しい: $\overline{\overline{A}^Y}^X = \overline{A}^X$ 。

証明. (⊃) $\overline{A}^Y \supset \overline{A}$ なので、 $\overline{\overline{A}^Y}^X \supset \overline{A}^X$ である。

(⊂) $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y \subset \overline{A}^X$ なので、 $\overline{\overline{A}^Y}^X \subset \overline{A}^X$ である。□

補題 2.6. T_0 空間 X の部分集合 Y は T_0 である。

証明. $x \neq y$ を Y の異なる二点とすると、 X の T_0 性より $\overline{\{x\}}^X \neq \overline{\{y\}}^X$ である。補題 2.5 より、これは $\overline{\overline{\{x\}}^Y}^X \neq \overline{\overline{\{y\}}^Y}^X$ を意味する。よって $\overline{\{x\}}^Y \neq \overline{\{y\}}^Y$ であるから、 Y は T_0 である (命題 2.2)。□

命題 2.7 ([FKI, Chapter 0, Proposition 2.1.1]). Sober 空間 X の局所閉*6部分集合 Y は sober である。

証明. 補題 2.6 より Y は T_0 である。 Y は X の開集合の閉集合であるから、 Y が開集合の場合と閉集合の場合をそれぞれ示せば十分である。 Z を Y の既約閉集合とする。

- $Y \subset X$ が閉集合の場合。このとき Z は X の既約閉集合であるから、 $Z = \overline{\{x\}}^X$ となる点 $x \in Z$ が存在する。 $Y \subset X$ は閉集合なので、 $\overline{\{x\}}^Y = \overline{\{x\}}^X = Z$ である。
- $Y \subset X$ が開集合の場合。このとき $\overline{Z}^X$ は X の既約閉集合であるから、 $\overline{Z}^X = \overline{\{x\}}^X$ となる点 $x \in \overline{Z}^X$ が存在する。このとき $\emptyset \neq Z = Z \cap Y \subset \overline{Z}^X \cap Y = \overline{\{x\}}^X \cap Y$ であるから、 $x \in Y$ である。よって $Z = \overline{Z}^X \cap Y = \overline{\{x\}}^X \cap Y = \overline{\{x\}}^Y$ である。

□

命題 2.8 ([FKI, Chapter 0, Proposition 2.1.2]). 位相空間 X が開被覆 $X = \bigcup_{\alpha \in L} U_\alpha$ を持っており、各 U_α が sober ならば、 X は sober である。

*6 位相空間 X の部分集合が局所閉であるとは、開集合と閉集合の共通部分であるときをいう。

証明. まず X が T_0 であることを示す。 $x, y \in X$ が $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ を満たすとする。 $x \in U_i$ となる $i \in I$ をとると、 $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ より $y \in U_i$ である。 $\overline{\{x\}} \cap U_i = \overline{\{y\}} \cap U_i$ で、 U_i は T_0 だから、 $x = y$ である。

次に、 X の任意の既約閉集合 Z が生成点を持つことを示す。 $Z \neq \emptyset$ だから、 $Z \cap U_i \neq \emptyset$ となる $i \in I$ がある。 このとき $Z \cap U_i$ は U_i の既約閉集合であるから (命題 1.6)、 $Z \cap U_i = \overline{\{x\}} \cap U_i$ となる $x \in Z \cap U_i$ が存在する。 Z も $\overline{\{x\}}$ も X の既約閉集合で U_i と交わるから、 命題 1.6 より $Z = \overline{\{x\}}$ である。 $\square$

例 2.9. スキームの underlying space は sober である。

3 Sober 化 (sobrification)

位相空間の圏 $\mathbf{Top}$ (対象は位相空間、射は連続写像) において、 sober 空間のなす充満部分圏を $\mathbf{STop}$ で表す。 このとき、 包含関手 $i: \mathbf{STop} \rightarrow \mathbf{Top}$ の左随伴関手

$$(-)^{\text{sob}}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{STop}$$

を構成することが目標である。

命題・定義 3.1 ([EGA, I_{new}, 0, (2.9.2.2)]). X を位相空間とする。

$$X^{\text{sob}} \stackrel{\text{def}}{=} \{Z \subset X \text{ 既約閉}\}$$

とおく。 また開集合 $U \subset X$ に対し

$$\tilde{U} \stackrel{\text{def}}{=} \{Z \in X^{\text{sob}} \mid Z \cap U \neq \emptyset\}$$

とおく。 このとき次が成り立つ。

- (1) $\tilde{\emptyset} = \emptyset$ および $\tilde{X} = X^{\text{sob}}$.
- (2) $\tilde{U} \cap \tilde{V} = (U \cap V)^{\sim}$.
- (3) $\bigcup_{\alpha \in L} \tilde{U}_\alpha = (\bigcup_{\alpha \in L} U_\alpha)^{\sim}$.

したがって、 X^{sob} には $\{\tilde{U} \mid U \subset X \text{ 開集合}\}$ を開集合系とする位相が入る。

証明. (1) 明らか。

(2) (⊃) $(-)^{\sim}$ が包含を保つことから従う。

(⊂) $Z \in \tilde{U} \cap \tilde{V}$ を任意にとる。 このとき $Z \cap U, Z \cap V \neq \emptyset$ である。 よって、 Z の既約性から $Z \cap U \cap V \neq \emptyset$ である (命題 1.3)。 したがって $Z \in (U \cap V)^{\sim}$ である。

(3) (⊂) $(-)^{\sim}$ が包含を保つことから従う。

(⊃) $Z \in (\bigcup_{\alpha \in L} U_\alpha)^{\sim}$ を任意にとる。 このとき $\emptyset \neq Z \cap \bigcup_{\alpha \in L} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in L} (Z \cap U_\alpha)$ であるから、 ある $\alpha \in L$ が存在して $Z \cap U_\alpha \neq \emptyset$ となる。 したがって $Z \in \tilde{U}_\alpha$ である。 $\square$

注意 3.2. 開集合 $U \subset X$ に対し

$$X^{\text{sob}} \setminus \tilde{U} = \{Z \in X^{\text{sob}} \mid Z \subset X \setminus U\} = (X \setminus U)^{\text{sob}}$$

であるから、 X^{sob} の閉集合系は $\{F^{\text{sob}} \mid F \subset X \text{ 閉集合}\}$ で与えられる。

随伴対 $((-)^{\text{sob}}, i)$ の単位射となるものを構成する。

命題・定義 3.3 ([EGA, I_{new}, 0, (2.9.2.5)]). X を位相空間とし、 写像

$$\eta_X: X \rightarrow X^{\text{sob}}; \quad x \mapsto \overline{\{x\}}$$

を考える。

- (1) η_X は準同相写像である (命題・定義 A.2)。
- (2) X^{sob} は sober 空間である。
- (3) X が sober なら、 $\eta_X: X \rightarrow X^{\text{sob}}$ は同相となる。

証明. (1) $\tilde{U} \mapsto \eta_X^{-1}\tilde{U}$ が開集合系の間の全単射となることを示せばよいが、任意の開集合 $U \subset X$ に対し

$$\eta_X^{-1}(\tilde{U}) = \{x \in X \mid x \in U\} = U \quad (3.1)$$

であるから、 $U \mapsto \tilde{U}$ が逆写像を与えることがわかる。

(2) まず X^{sob} が T_0 であることを示す。 $Z_1 \neq Z_2$ を X^{sob} の異なる二点とする。一般性を失わず $Z_1 \not\subset Z_2$ としてよい。 $x \in Z_1 \setminus Z_2$ をとる。 $U_2 := X \setminus Z_2$ とおくと、 $x \in Z_1 \cap U_2$ だから $Z_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ 、したがって $Z_1 \in \tilde{U}_2$ である。一方、 $U_2 = X \setminus Z_2$ だから $Z_2 \cap U_2 = \emptyset$ 、したがって $Z_2 \notin \tilde{U}_2$ である。よって X^{sob} は T_0 である。

次に、 X^{sob} の任意の既約閉集合が生成点を持つことを示す。(1) より $Z \mapsto \eta_X^{-1}(Z)$ は閉集合系の間の (包含を保つ) 全単射となるが、既約空間の (束としての性質のみで記述されているという) 定義から、これは既約閉集合のなす集合の間の全単射を誘導する。そこで、 $F \subset X^{\text{sob}}$ を既約閉集合とすると、 $Z := \eta_X^{-1}(F) \subset X$ は既約閉集合、したがって X^{sob} の点を与える。この点 $Z \in X^{\text{sob}}$ が $F \subset X^{\text{sob}}$ の生成点となることを示そう*7。補集合 $X^{\text{sob}} \setminus \{Z\}$ は、開集合 $\tilde{U} \subset X^{\text{sob}}$ で $Z \notin \tilde{U}$ となる最大のものである。ここで

$$Z \notin \tilde{U} \iff \eta_X^{-1}(F) \cap U = \emptyset \stackrel{(3.1)}{\iff} \eta_X^{-1}(F) \cap \eta_X^{-1}(\tilde{U}) = \emptyset \iff F \cap \tilde{U} = \emptyset$$

であるから、補集合 $X^{\text{sob}} \setminus \{Z\}$ は開集合 $\tilde{U} \subset X^{\text{sob}}$ で $F \cap U = \emptyset$ となる最大のものである。これは $X^{\text{sob}} \setminus F$ に他ならないので、 $F = \{Z\}$ が示された。

(3) Sober 空間の定義より「 X が sober $\iff \eta_X$ が全単射」であり、 η_X が全射なら (1) より η_X は開写像となる (命題 A.4)。よって (3) が従う。□

関手 $(-)^{\text{sob}}: \text{Top} \rightarrow \text{STop}$ の射の対応を定義する。

命題・定義 3.4 ([EGA, I_{new}, 0, (2.9.2.7)]). $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする。写像 $f^{\text{sob}}: X^{\text{sob}} \rightarrow Y^{\text{sob}}$ を

$$f^{\text{sob}}(Z) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{f(Z)} \quad (\forall Z \in X^{\text{sob}})$$

で定義する (cf. 命題 1.5)。このとき、任意の開集合 $V \subset Y$ に対し

$$(f^{\text{sob}})^{-1}(\tilde{V}) = (f^{-1}(V))^{\sim}$$

が成り立つ。特に、 f^{sob} は連続である。

証明. 任意の $Z \in X^{\text{sob}}$ に対し

$$\begin{aligned} Z \in (f^{\text{sob}})^{-1}(\tilde{V}) &\iff f^{\text{sob}}(Z) \in \tilde{V} \\ &\iff \overline{f(Z)} \cap V \neq \emptyset \\ &\iff f(Z) \cap V \neq \emptyset \\ &\iff Z \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset \\ &\iff Z \in (f^{-1}(V))^{\sim}. \end{aligned}$$

□

*7 注意 3.2 で言うと、既約閉集合 $Z^{\text{sob}} \subset X^{\text{sob}}$ に対し、 $\eta_X^{-1}(Z^{\text{sob}}) = \{x \in X \mid \{x\} \subset Z\} = Z$ であるから $Z \mapsto Z^{\text{sob}}$ が閉集合系の間の全単射となり、また $Z^{\text{sob}} = \{Z\}$ である。

補題 3.5. $f: X \rightarrow Y$ を連続写像、 $A \subset X$ を部分集合とする。

- (1) $f(A)$ は $f(\overline{A})$ において稠密である。
- (2) $\overline{f(A)} = \overline{f(\overline{A})}$.

証明. (1) 任意の開集合 $V \subset Y$ に対し

$$V \cap f(\overline{A}) \neq \emptyset \iff f^{-1}(V) \cap \overline{A} \neq \emptyset \iff f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset \iff V \cap f(A) \neq \emptyset.$$

したがって $f(A)$ は $f(\overline{A})$ の空でない任意の開集合と交わるので、 $f(\overline{A})$ において稠密である。

- (2) $B := f(\overline{A})$ とおくと、(1) より $\overline{f(A)}^B = B$ であるから、補題 2.5 より $\overline{f(A)}^Y = \overline{f(A)}^B{}^Y = \overline{B}^Y$. $\square$

命題 3.6. (1) $(-)^{\text{sob}}: \text{Top} \rightarrow \text{STop}$ は関手をなす。

- (2) $\eta := \{\eta_X\}_{X \in \text{Ob}(\text{Top})}$ は自然変換 $\eta: \text{id}_{\text{Top}} \Rightarrow (-)^{\text{sob}}$ をなす。

証明. (1) $(\text{id}_X)^{\text{sob}} = \text{id}_{X^{\text{sob}}}$ は明らか。 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ を連続写像の列とすると、任意の $E \in X^{\text{sob}}$ に対し

$$(g \circ f)^{\text{sob}}(E) = \overline{g(f(E))}, \quad (g^{\text{sob}} \circ f^{\text{sob}})(E) = \overline{g(f(E))}$$

であり、補題 3.5 (2) よりこれらは等しい。よって $(g \circ f)^{\text{sob}} = g^{\text{sob}} \circ f^{\text{sob}}$ である。

- (2) 任意の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y \\ X^{\text{sob}} & \xrightarrow{f^{\text{sob}}} & Y^{\text{sob}} \end{array} \quad (3.2)$$

が可換であることを示せばよいが、任意の $x \in X$ に対し

$$(\eta_Y \circ f)(x) = \overline{\{f(x)\}}, \quad (f^{\text{sob}} \circ \eta_X)(x) = \overline{f(\{x\})}$$

であり、補題 3.5 (2) よりこれらは等しい。 $\square$

命題 3.7 ([EGA, I_{new}, 0, (2.9.2)]). 関手 $(-)^{\text{sob}}: \text{Top} \rightarrow \text{STop}$ は包含関手 $i: \text{STop} \rightarrow \text{Top}$ の左随伴関手である。さらに、命題・定義 3.3 の η が随伴対 $((-)^{\text{sob}}, i)$ の単位射となるようにできる。

証明. 任意の $X \in \text{Top}$ と $Y \in \text{STop}$ に対し、次の全単射を示せばよい。

$$\begin{aligned} \text{Top}(X, Y) &\leftrightarrow \text{STop}(X^{\text{sob}}, Y) \\ f &\mapsto \eta_Y^{-1} \circ f^{\text{sob}} \\ g \circ \eta_X &\leftrightarrow g \end{aligned}$$

(左から取ってもとに戻るか): $f \in \text{Top}(X, Y)$ に対し、 η の自然性 (3.2) より $(\eta_Y^{-1} \circ f^{\text{sob}}) \circ \eta_X = f$ である。

(右から取ってもとに戻るか): $g: X^{\text{sob}} \rightarrow Y$ を連続写像とし、 $f := g \circ \eta_X$ において $\eta_Y^{-1} \circ f^{\text{sob}} = g$ を示す。 $f^{\text{sob}} = \eta_Y \circ g$ を示せば十分である。 $Z \in X^{\text{sob}}$ を任意にとる。示したいことは $\overline{f(Z)} = \overline{\{g(Z)\}}$ である。 $F := \eta_X(Z) = \overline{\{Z\}} \subset X$ とおくと、 $f = g \circ \eta_X$ より

$$f(Z) = g(F) = g(F \cap \eta_X(X)).$$

ここで命題・定義 3.3 (1) より $\eta_X: X \rightarrow X^{\text{sob}}$ は準同相であるから、像 $\eta_X(X)$ は X^{sob} において非常に稠密である (命題・定義 A.2 (3))。よって命題・定義 A.1 (3) より $\overline{F \cap \eta_X(X)} = F$ であるから、

$$\overline{f(Z)} = \overline{g(F \cap \eta_X(X))} \stackrel{\text{補題 3.5 (2)}}{=} \overline{g(F \cap \eta_X(X))} = \overline{g(F)} = \overline{g(\{Z\})} \stackrel{\text{補題 3.5 (2)}}{=} \overline{\{g(Z)\}}.$$

これが示したいことであった。 $\square$

付録 A 準同相写像

命題・定義 3.3 (1) で現れた準同相写像について述べる。まず、非常に稠密な部分集合を思い出す。

命題・定義 A.1 ([GWI, Definition and Remark 3.34], [EGA, I_{new}, 0, (2.6.2), (2.6.3)]). X を位相空間、 $X_0 \subset X$ を部分集合とする。このとき次は同値となる。

- (1) $U \mapsto U \cap X_0$ は X の開集合系から X_0 の開集合系への全単射となる。
- (2) $F \mapsto F \cap X_0$ は X の閉集合系から X_0 の閉集合系への全単射となる。
- (3) X の任意の閉集合 F に対して、 $\overline{F \cap X_0} = F$ が成り立つ。
- (4) X の空でない局所閉集合は X_0 と交わる。

これらの同値な条件が満たされるとき、 X_0 は X で**非常に稠密 (very dense)** であるという。

命題・定義 A.2 ([EGA, I_{new}, 0, (2.7.1), (2.7.2)]). 位相空間の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し以下は同値となる。

- (1) $V \mapsto f^{-1}(V)$ は Y の開集合系から X の開集合系への全単射となる。
- (2) $F \mapsto f^{-1}(F)$ は Y の閉集合系から X の閉集合系への全単射となる。
- (3) X の位相は f による誘導位相と一致し、かつ、 $f(X)$ は Y で非常に稠密である。

これらの同値な条件が満たされるとき、 f は**準同相 (quasi-homéomorphisme)** であるという。

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2): 補集合をとればよい。

(1) $\Rightarrow$ (3): X の位相が f による誘導位相と一致することは明らか。開集合 $U_1, U_2 \subset X$ が $U_1 \cap f(X) = U_2 \cap f(X)$ を満たすとする、 $f^{-1}(U_1) = f^{-1}(U_2)$ であるから、(1) より $U_1 = U_2$ となる。よって、 $f(X)$ は Y において非常に稠密である。

(3) $\Rightarrow$ (1): 写像 $V \mapsto f^{-1}(V)$ は次のように分解できる (Op は開集合系を表す)。

$$\begin{aligned} \text{Op}(Y) &\longrightarrow \text{Op}(f(X)) \longrightarrow \text{Op}(X), \\ V &\longmapsto V \cap f(X), \\ V &\longmapsto f^{-1}(V). \end{aligned}$$

ここで左の写像は $f(X)$ が Y において非常に稠密という仮定から全単射であり、右の写像は X の位相が f による誘導位相と一致するという仮定から全単射となる。よってその合成も全単射であり、(1) が従う。 $\square$

例 A.3. (1) 同相写像は準同相写像である。

- (2) 非常に稠密な部分集合からの包含写像は準同相写像である。
- (3) 密着空間 X から一点集合への写像 $X \rightarrow \{*\}$ は準同相写像である。しかし、 X が二点以上を持てば同相写像ではない。
- (4) I を密着空間とする。任意の位相空間 Y に対して、射影 $Y \times I \rightarrow Y$ は準同相写像である。しかし、 I が二点以上を持てば同相写像ではない。

命題 A.4. 準同相写像 $f: X \rightarrow Y$ が全射なら、 f は開写像である。

証明. 開集合 $U \subset X$ を任意にとる。準同相性より、ある開集合 $V \subset Y$ が存在して $U = f^{-1}(V)$ と書ける。 f は全射なので $f(U) = V$ であり、これは Y の開集合。よって f は開写像である。 $\square$

参考文献

- [SGA4-1] M. Artin, A. Grothendieck, J. L. Verdier (eds.), *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*. Tome 1. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963/1964, SGA 4. With the collaboration of N. Bourbaki, P. Deligne and B. Saint-Donat. Lecture Notes in Mathematics **269**. Springer Verlag, Berlin etc., 1972.
- [BouAC] N. Bourbaki, *Elements of mathematics. Commutative algebra*. Translated from the French. Hermann, Publishing Co., Reading, MA, etc., 1972.
- [FKI] K. Fujiwara, F. Kato, *Foundations of Rigid Geometry I*, EMS Monographs in Mathematics, 2018.
- [GWI] U. Görtz, T. Wedhorn, *Algebraic Geometry I*, 2nd ed., Springer Spektrum, 2020.
- [EGA, I_{new}] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique I*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 166.
- [SGL] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory*, Corrected reprint of the 1992 edition. Universitext. Springer Verlag, New York, N.Y., 1994. Springer Verlag, Berlin etc., 1971.