

局所コンパクト空間の定義について

林 和輝

2026 年 6 月 30 日

概要

数論などにおいて、局所コンパクト空間は多くの重要な位相空間を含む基本的なクラスである。しかし、その定義にはいくつかの流儀があり、文献によって異なることもある。Neukirch [Neu] を読んでいてこの点が気になったので、このノートにまとめておく（そもそも [Neu] には局所コンパクト空間の定義は書かれていないが）。主に英語版 Wikipedia や Gompf [Gom92] を参考にした。結論自体はよく知られていると思うが、Hausdorff 空間においては、考えられうる自然な定義はすべて同値になる。

記号と約束

- 内部を $(-)^{\circ}$, 閉包を $\overline{(-)}$ で表す。
- 近傍と開近傍を区別する。
- Bourbaki とは異なり、コンパクト空間には Hausdorff 性を仮定しない。すなわち、本稿でのコンパクト空間は Bourbaki における quasi-compact 空間を意味する。
- これも Bourbaki とは異なるが、位相空間 X の部分集合 A が X において相対コンパクトであるとは、閉包 $\overline{A}$ がコンパクトであることをいう^{*1}。

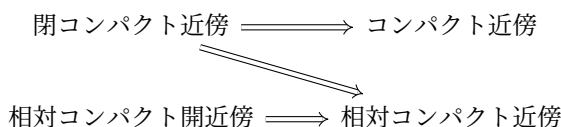
次の観察から始めよう。

観察 1. 局所コンパクト性を定義するにあたって、素朴には、各点がコンパクトな近傍を持つことを要求する定義が考えられる。しかし、このような定義には次のような問題がある（cf. [Mun, Theorem 29.2 の前]）。

(1) 『コンパクトな近傍』といっても、少なくとも次の 4 種類が考えられる。

- コンパクト近傍
- 閉コンパクト近傍
- 相対コンパクト近傍
- 相対コンパクト開近傍

定義から直ちに分かるように、これらの間には次の implication がある。



^{*1} Bourbaki では、 A が X のあるコンパクト部分集合に含まれることを定義としている（[BouGT1, Chapter I, §9.3, Definition 3]）。 X が Hausdorff なら、この定義は上の定義と一致する（明らかではあるが、[BouGT1, Chapter I, §9.3, Proposition 6] にも記されている）。ここでは [内田, §24] および [松坂, 第 5 章, §2, E)] の定義に従った（そんなに珍しい定義でもないと思う）。

(2) 通常、空間 X がある性質を「局所的に」満たすというのは、各点 $x \in X$ がその性質を持つ「任意に小さい」近傍を持つことを意味する。しかし、各点が「コンパクトな近傍」を持つというだけの定義では、この「任意に小さい」という側面が反映されていない。これを正確に定式化するには、基本近傍系の概念を用いるべきである。もちろん、この条件は単に各点がコンパクトな近傍を持つという条件よりも強い。余談だが、[Mun, Theorem 29.2 の前] では前者の定義を「not very satisfying」、後者の定義を「more truly “local”」と述べている。以下の命題 2 ではこの考え方を尊重して、前者のラベルにプライムをつけた。

この観察を踏まえて、局所コンパクトの定義として考えられる 8 つの条件を比較する。

命題 2. X を位相空間、 $x \in X$ とする。次の条件を考える。

(C) x のコンパクト近傍全体は x の 1 つの基本近傍系をなす。

(CC) x のコンパクト閉近傍全体は x の 1 つの基本近傍系をなす。

(RC) x の相対コンパクト近傍全体は x の 1 つの基本近傍系をなす。

(RCO) x の相対コンパクト開近傍全体は x の 1 つの基本近傍系をなす。

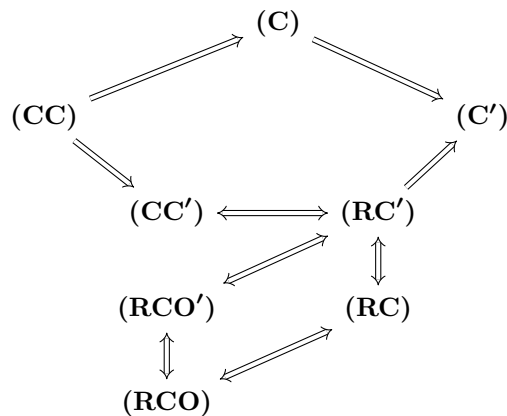
(C') x のコンパクト近傍が存在する。

(CC') x のコンパクト閉近傍が存在する。

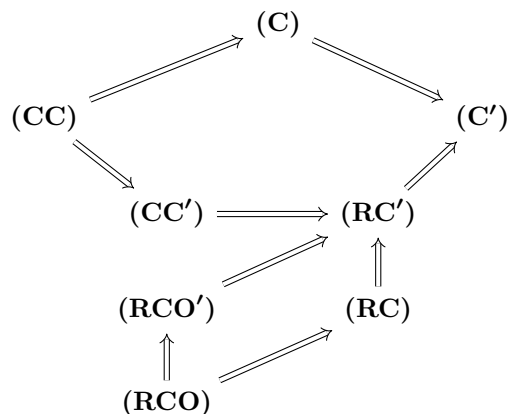
(RC') x の相対コンパクト近傍が存在する。

(RCO') x の相対コンパクト開近傍が存在する。

このとき、次の implication が成り立つ。



証明. 観察 1 で述べたことからわかるように、次の implication は自明である。



残りの implication を示す^{*2}。

(RC') $\Rightarrow$ (CC'): x の相対コンパクト近傍の閉包は x のコンパクト閉近傍であることから従う。

(RC') $\Rightarrow$ (RCO'): x の相対コンパクト近傍の内部は x の相対コンパクト開近傍であることから従う (コンパクト空間の閉集合はコンパクトなので)。

(RC') $\Rightarrow$ (RC): x の近傍 V を任意にとる。仮定 (RC') より、 x の相対コンパクト近傍 W が存在する。このとき、 $\overline{V \cap W}$ はコンパクト空間 $\overline{W}$ の閉集合だからコンパクトである。よって、 $V \cap W$ は V に含まれる x の相対コンパクト近傍である。

(RCO') $\Rightarrow$ (RCO): x の近傍 V を任意にとる。仮定 (RCO') より、 x の相対コンパクト開近傍 W が存在する。このとき、 $\overline{V^\circ \cap W}$ はコンパクト空間 $\overline{W}$ の閉集合だからコンパクトである。よって、 $V^\circ \cap W$ は V に含まれる x の相対コンパクト開近傍である。

(RC) $\Rightarrow$ (RCO): x の相対コンパクト近傍の内部は x の相対コンパクト開近傍であることから従う (コンパクト空間の閉集合はコンパクトなので)。 $\square$

注意 3. 命題 2 において、すべての $\Rightarrow$ は strict である。それを示す例は、難しいわけではないがまとめる気力がないので [Gom92] を参照してほしい。

注意 4. 命題 2 において、同値なものを除いた計 4 つの条件はそれぞれ [Gom92] で

(C) “bit locally compact”

(CC) “strongly locally compact”

(C') “weakly compact”

(RC') “mildly locally compact”

と呼ばれている。

X が Hausdorff なら、命題 2 の条件はすべて同値となることを示そう。(CC) が最も強く、(C') が最も弱いので、

$$(C') + 「X : \text{Hausdorff}」 \implies (CC) \quad (0.1)$$

を示せばよい。そのための準備として、正則空間の定義を思い出す。

命題・定義 5 (cf. [松坂, 第 5 章, §3, 定理 20 と問題 8], [BouGT1, Chap. I, §8.4, Proposition 11]).

位相空間 X に対し、以下は同値となる。

(O₃) X の各点 x に対し、その閉近傍の全体が x の 1 つの基本近傍系をなす。

(O'₃) $x \in X$ で、 $U \subset X$ が x の開近傍ならば、

$$x \in U_1, \quad \overline{U_1} \subset U$$

を満たす開集合 U_1 が存在する。

X が T_1 空間であって、さらに上記の同値な条件を満たすとき、 X を**正則空間**という。

証明. (O₃) $\Rightarrow$ (O'₃): $x \in X$ で、 $U \subset X$ が開近傍とすれば、 $F \subset U$ となる x の閉近傍 F がある。 $U_1 := F^\circ$ とおけば $x \in U_1$ で、 $U_1 \subset F$ であるから $\overline{U_1} \subset F \subset U$ 。

(O'₃) $\Rightarrow$ (O₃): $x \in X$ とし、 V を x の任意の近傍とすれば、 $x \in V^\circ$ であるから、 $x \in U_1, \overline{U_1} \subset V^\circ$ となる開集合 U_1 がある。このとき $\overline{U_1}$ は x の閉近傍で $\overline{U_1} \subset V^\circ \subset V$ 。 $\square$

そろそろ (0.1) を示したいところだが、ここで (位相空間 X と点 $x \in X$ に対し) 次の条件を考える。

^{*2} 平行四辺形のうちの 1 つの implication は省略できるが、特に難しいものもないので全部書く。

(FK) x のコンパクト近傍であって Hausdorff 近傍に含まれるものが存在する。

この条件は [FKI] における局所コンパクト空間の定義に現れるものであり、Hausdorff 性を局所 Hausdorff 性に弱めたものと考えられる^{*3}。このとき、(0.1) の間に (FK) を差し込んで、

$$(C') + 「X : \text{Hausdorff}」 \implies (FK) \implies (CC)$$

が成り立つことを示す。1 つ目の $\implies$ は明らかなので、2 つ目の $\implies$ を示せばよい：

主張 6. 位相空間 X と点 $x \in X$ に対し、 $(FK) \implies (CC)$ が成り立つ。

証明. (FK) より、 x のコンパクト近傍 K であって Hausdorff 近傍 U に含まれるものが存在する。 V を x の任意の近傍とする。このとき $K \cap U$ はコンパクト Hausdorff だから正規、したがって正則である。 $(K \cap U) \cap V$ は $K \cap U$ における x の近傍であるから、 (O_3) により、 $x \in F \subset (K \cap U) \cap V$ となる $K \cap U$ における x の閉近傍 F が存在する。

- 「Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉集合」より $K \cap U$ は U の閉集合であるから、 F は U においても閉集合である。
- F は x の $K \cap U$ における近傍であるから、 F は x の X における近傍ともなる。
- 「コンパクト空間の閉集合はコンパクト」より $F (\subset K)$ はコンパクトである。

したがって F は X における x のコンパクト近傍で、しかも $F \subset V$ である。ゆえに (CC) が成り立つ。 $\square$

系 7. 位相空間 X が Hausdorff ならば、任意の点 $x \in X$ に対し、命題 2 の条件および (FK) はすべて同値となる。

以上により、局所コンパクト Hausdorff 空間を安心して定義できる。

定義 8. X を位相空間とする。任意の点 $x \in X$ に対して命題 2 の条件のいずれか、あるいは (FK) (したがってすべて) が満たされるとき、 X を**局所コンパクト Hausdorff 空間**という。

注意 9. Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉集合であるから、条件 (CC) より、局所コンパクト Hausdorff 空間は正則であることが従う。主張 6 の証明はこの事実の証明と同様である (例えば [松坂, 第 5 章, §3, 問題 9] や [BouGT1, Chap. I, §9.7, Proposition 9 and its Corollary])。

注意 10. 筆者が確認した限りの文献における局所コンパクトの定義をまとめておく。

- [内田, §24], [松坂, 第 5 章, §2, E)], [Kel, p. 146], [Mun, §29] では (C') が採用されている。
- [玉木, 定義 3.4.9] では (RCO) が採用されている。
- [FKI, Introduction] では (FK) が採用されている。
- Bourbaki は「Hausdorff + (C') 」を “locally compact” と呼び、 (C) を “locally quasi-compact” と呼んでいる (それぞれ [BouGT1, Chap. I, §9.7, Definition 4] と [BouGT1, Chap. I, §9, Exercise 29])。

参考文献

- [内田] 内田伏一, 集合と位相, 裳華房, 1986.
[玉木] ファイバー束とホモトピー, 森北出版, 2020.
[松坂] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968.
[壬生] 壬生雅道, 位相群論概説, 岩波書店, 1976.

^{*3} 一般に「Hausdorff $\neq$ 局所 Hausdorff」である (cf. [BouGT1, Chap. I, §8.2, Proposition 6 and Exercise 7])。

- [BouGT1] N. Bourbaki, *Elements of mathematics. General topology*. Part 1. Translated from the French. Hermann, Publishers in Arts and Science, Paris, and Addison–Wesley Publishing Co., Reading, MA, etc., 1966.
- [FKI] K. Fujiwara, F. Kato, *Foundations of Rigid Geometry I*, EMS Monographs in Mathematics, 2018.
- [Gom92] R. R. Gompf, *WHAT IS “LOCALLY COMPACT”?*, Pi Mu Epsilon J. **9**(6), (1992), 390–392.
- [Kel] J. L. Kelly, *General topology*, D. Van Nostrand Co., Inc., Toronto-New York-London, 1955.
- [Mun] J. R. Munkres, *Topology*, second edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.
- [Neu] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, transl. by N. Schappacher, Springer, 1999.