

整環上の Cohen–Macaulay 加群の例 (Part 1)

林 和輝

2024 年 8 月 29 日

概要

東京大学で行われる第 19 回可換環論サマースクールのためのノート。整環上の Cohen–Macaulay 加群の例として、Eisenbud の行列因子化を紹介する。まず、超曲面局所環 $S/(f)$ 上の Cohen–Macaulay 加群が f の行列因子化で表せるという Eisenbud の定理を示す。次に、この結果を整環を用いて言い換える。

目次

1	Eisenbud の行列因子化定理	1
2	整環を用いた言い換え	8

記号と約束

本稿を通して、次を使う。

- Cohen–Macaulay 加群 = 極大 Cohen–Macaulay 加群
- 可換ネーター環 R に対し、 R 上の Cohen–Macaulay 加群の圏を $\text{CM}(R)$, その安定圏を $\underline{\text{CM}}(R)$ で表す。
- 特に断らない限り、加群とは左加群を意味する。
- S : 正則局所環
- $f \in \mathfrak{m}_S \setminus \{0\}$
- $R := S/(f)$
- 例 (例 1.6 と 1.12) において、 k は常に体を表す。

1 Eisenbud の行列因子化定理

今回のサマースクールの主題である Cohen–Macaulay 表現論の目標の一つは、可換 Cohen–Macaulay 局所環上の Cohen–Macaulay 加群の圏を調べることである。例えば正則局所環 S については、Auslander–Buchsbaum–Serre の定理によって

$$\text{CM}(S) = \text{proj}(S) = \{ \text{有限生成自由 } S \text{ 加群} \}$$

が成り立ち、自明なケースであると言ってよい。一方、本稿の対象はそのような正則局所環を非零因子で割った環 $R = S/(f)$ である (超曲面と呼ばれる)。本節では、超曲面局所環上の Cohen–Macaulay 加群を調べるための手法である行列因子化について、Eisenbud の定理を中心に述べる。

次の観察から始める：

観察 1.1. $M \in \text{CM}(R)$ とし、その S 上の自由分解

$$\cdots \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

を考える (各 F_i は有限生成自由 S 加群)。 $F_1 \rightarrow F_0$ の核をとって得られる S 加群の短完全列 $0 \rightarrow \Omega_S M \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ に対し、depth lemma より

$$\text{depth}_S(\Omega_S M) \geq \min\{\text{depth}_S(F_0), \text{depth}_S M + 1\}$$

が成立する。ここで

- $\text{depth}_S(F_0) = \text{depth } S = \dim S$
- $\text{depth}_S M = \text{depth}_R M = \dim R = \dim S - 1$

なので、 $\text{depth}_S(\Omega_S M) \geq \dim S$ 、したがって $\Omega_S M \in \text{CM}(S) = \text{proj}(S)$ である。よって、 $\Omega_S M \rightarrow F_0$ を $\varphi: F \rightarrow G$ と書くと、 M の S 上の自由分解として

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{\varphi} G \rightarrow M \rightarrow 0$$

という形のものが得られる。さらに、 M が $R = S/(f)$ 加群であることから $M \xrightarrow{f} M$ は零射なので、核の普遍性より次の図式を可換にする S 線形写像 $\psi: G \rightarrow F$ が存在する (ψ の左上の三角形の可換性は下の $F \xrightarrow{\varphi} G$ の単射性から従う)。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\varphi} & G & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & f \times \downarrow & \swarrow \psi & \downarrow f \times & & \downarrow f \times = 0 \\ 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\varphi} & G & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

つまり、 φ, ψ は

$$\varphi\psi = f \cdot 1_G, \quad \psi\varphi = f \cdot 1_F \quad (1.1)$$

を満たす。

この観察から、次の定義に行き着く：

定義 1.2. f の行列因子化とは、有限生成自由 S 加群の準同型の組 $(\varphi: F \rightarrow G, \psi: G \rightarrow F)$ であって式 (1.1) を満たすもののことである。

注意 1.3. 有限生成自由加群の間の線形写像は (基底を決めることで) 行列として表された。「 f の行列因子化」という名前は、式 (1.1) のように f (を対角成分に並べた行列) が行列 (として表すことのできる) φ, ψ によって分解されるという様子から来ている。

このとき観察 1.1 は次のようにまとめられる：

命題 1.4. 任意の $M \in \text{CM}(R)$ に対して f のある行列因子化 (φ, ψ) が存在して $\text{Cok}(\varphi) \cong M$ となる。■

注意 1.5. $(\varphi: F \rightarrow G, \psi: G \rightarrow F)$ を f の行列因子化とする。

- (1) (ψ, φ) も f の行列因子化である。
- (2) φ と ψ は単射である ($\varphi\psi = f \cdot 1_F$ が単射だから)。
- (3) $\text{rk}_S(F) = \text{rk}_S(G)$ である (S の商体をテンソルして (2) を使う)。

例 1.6. (1) $(0, 0) = (0 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 0)$ はいつでも f の行列因子化である。

(2) $(1_S, f) = (S \xrightarrow{1_S} S, S \xrightarrow{f} S)$ および $(f, 1_S)$ はいつでも f の行列因子化である。

(3) $f = xy \in S = k[[x, y]]$ に対して、 $(x, y) = (S \xrightarrow{x} S, S \xrightarrow{y} S)$ は f の行列因子化である。

(4) $f = xy \in S = k[[x, y, z]]$ に対して、次は f の行列因子化を与える。

$$\left(\begin{bmatrix} x & z \\ 0 & y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y & -z \\ 0 & x \end{bmatrix} \right)$$

(5) $f = x^2 + y^n \in S = k[[x, y]]$ に対して、次は f の行列因子化を与える。

$$\left(\begin{bmatrix} y^i & -x \\ x & y^{n-i} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^{n-i} & x \\ -x & y^i \end{bmatrix} \right) \quad (1 \leq i \leq n)$$

これから f の行列因子化と R 加群の関係を見ていく。そのためにまず、行列因子化の圏を定義する。

定義 1.7. f の行列因子化のなす圏 $\mathbf{MF}_S(f)$ を以下のように定義する。

- $\mathbf{MF}_S(f)$ の対象は、 f の行列因子化 (φ, ψ) である。
- f の行列因子化 $(\varphi, \psi) = (\varphi: F \rightarrow G, \psi: G \rightarrow F), (\varphi', \psi') = (\varphi': F' \rightarrow G', \psi': G' \rightarrow F')$ に対して、 (φ, ψ) から (φ', ψ') への射は S 線形写像の対

$$(\alpha, \beta) = (\alpha: F \rightarrow F', \beta: G \rightarrow G')^{*1}$$

であって、

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{\varphi} & G & \xrightarrow{\psi} & F \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha \\ F' & \xrightarrow{\varphi'} & G' & \xrightarrow{\psi'} & F' \end{array} \quad (1.2)$$

を可換にするものとする。

- 射 $(\alpha, \beta): (\varphi, \psi) \rightarrow (\varphi', \psi')$ および $(\alpha', \beta'): (\varphi', \psi') \rightarrow (\varphi'', \psi'')$ の合成を $(\alpha', \beta') \circ (\alpha, \beta) := (\alpha' \circ \alpha, \beta' \circ \beta)$ で定義する。
- 対象 $(\varphi, \psi) = (\varphi: F \rightarrow G, \psi: G \rightarrow F)$ の恒等射は $(1_F, 1_G)$ で与えられる。

注意 1.8. 行列因子化の射であることを示す際には、図式 (1.2) の片方の四角形の可換性のみ確かめれば十分である。実際、注意 1.5 (1) より右側の四角形が可換と仮定しても一般性を失わず、また注意 1.5 (2) より ψ' は単射なので右下の F' まで行って一致していればよいが、それは右側の四角形の可換性（仮定より）と外側の四角形の可換性（ α と $\psi\varphi = \psi'\varphi' = f \cdot 1_{F'}$ が可換より）から従う。

命題 1.9. $\mathbf{MF}_S(f)$ は加法圏になる。

証明. 素直に示されるが、概要だけ書いておく。

- f の行列因子化 $(\varphi: F \rightarrow G, \psi: G \rightarrow F), (\varphi': F \rightarrow G, \psi': G \rightarrow F)$ の間の射 $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbf{MF}_S(f)((\varphi, \psi), (\varphi', \psi'))$ に対して、和を

$$(\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$$

と定義する。このとき、 $(0: F \rightarrow F', 0: G \rightarrow G')$ を零元として $\mathbf{MF}_S(f)((\varphi, \psi), (\varphi', \psi'))$ はアーベル群となる。

- $\mathbf{MF}_S(f)$ の零対象は例 1.6 (1) の行列因子化 $(0, 0)$ で与えられる。
- f の行列因子化 $(\varphi, \psi), (\varphi', \psi') \in \mathbf{MF}_S(f)$ に対し、直和 $(\varphi, \psi) \oplus (\varphi', \psi')$ は成分ごとの直和

$$(\varphi, \psi) \oplus (\varphi', \psi') \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi \oplus \varphi', \psi \oplus \psi')$$

*1 [Yos] や [LW] の記法に従うなら (β, α) と書くのが正しく、 α と β の順番が逆なので比較して読むときは注意。この記法を採用した理由は、 φ, ψ の順に α, β と並んだ方が見やすいと考えたからである。

$$= \left(\begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \psi' \end{bmatrix} \right)$$

で与えられる。

□

定理 1.10 ([Yos, (7.4) THEOREM]). 加法関手 $\text{Cok}: \text{MF}_S(f) \rightarrow \text{Mod } S$ を次で定義する。

- $(\varphi, \psi) \in \text{MF}_S(f)$ に対して $\text{Cok}(\varphi, \psi) := \text{Cok } \varphi$.
- $(\alpha, \beta): (\varphi, \psi) \rightarrow (\varphi', \psi')$ に対して $\text{Cok}(\alpha, \beta): \text{Cok}(\varphi, \psi) \rightarrow \text{Cok}(\varphi', \psi')$ を次の図式を可換にする一意的な射と定義する。

$$\begin{array}{ccccccc} F & \xrightarrow{\varphi} & G & \longrightarrow & \text{Cok } \varphi & \longrightarrow & 0 \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow \text{Cok}(\alpha, \beta) & & \\ F' & \xrightarrow{\varphi'} & G' & \longrightarrow & \text{Cok } \varphi' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

このとき、この関手は圏同値

$$\text{MF}_S(f)/[(1_S, f)] \xrightarrow{\cong} \text{CM}(R)$$

を誘導する。

証明. $(\varphi: F \rightarrow G, \psi: G \rightarrow F) \in \text{MF}_S(f)$ に対して、 $M := \text{Cok}(\varphi, \psi) = \text{Cok } \varphi \in \text{CM}(R)$ であることを示す。まず、以下の可換図式より $f \cdot M = 0$ がわかるので、 M は $R = S/(f)$ 加群である。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\varphi} & G & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & f \times \downarrow & \swarrow \psi & \downarrow f \times & & \downarrow f \times \\ 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\varphi} & G & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

さらに、depth lemma より

$$\text{depth}_S M \geq \min\{\text{depth}_S F - 1, \text{depth}_S G\} = \text{depth } S - 1,$$

すなわち $\text{depth}_R M \geq \dim R$ が成り立つので $M \in \text{CM}(R)$ である。

以上より加法関手 $\text{Cok}: \text{MF}_S(f) \rightarrow \text{CM}(R)$ が得られたが、命題 1.4 よりこれは本質的全射である。そこで、あとは $\text{Ker}(\text{Cok}) = [(1_S, f)]$ であることを示せばよい。

(○) $\text{Cok}(1_S, f) = \text{Cok}(1_S) = 0$ より従う。

(○) $(\alpha, \beta) \in \text{MF}_S(f)((\varphi, \psi), (\varphi', \psi'))$ が $\text{Cok}(\alpha, \beta) = 0$ を満たすとなると、核の普遍性より次の点線 γ が誘導される。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\varphi} & G & \longrightarrow & \text{Cok}(\varphi, \psi) \longrightarrow 0 \\ & & \alpha \downarrow & \swarrow \gamma & \downarrow \beta & & \downarrow \text{Cok}(\alpha, \beta)=0 \\ 0 & \longrightarrow & F' & \xrightarrow{\varphi'} & G' & \longrightarrow & \text{Cok}(\varphi', \psi') \longrightarrow 0 \end{array}$$

このとき $(\alpha, \gamma): (\varphi, \psi) \rightarrow (1_{F'}, f \cdot 1_{F'})$ は行列因子化の射である*2:

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{\varphi} & G & \xrightarrow{\psi} & F \\ \alpha \downarrow & & \gamma \downarrow & & \downarrow \alpha \\ F' & \xlongequal{\quad} & F' & \xrightarrow{f} & F' \end{array}$$

*2 左側の四角形の可換性から注意 1.8 より右側の四角形も可換となる。

また $(1_{F'}, \varphi'): (1_{F'}, f \cdot 1_{F'}) \rightarrow (\varphi', \psi')$ も行列因子化の射である:

$$\begin{array}{ccccc} F' & \xlongequal{\quad} & F' & \xrightarrow{f} & F' \\ \parallel & & \varphi' \downarrow & & \parallel \\ F' & \xrightarrow{\varphi'} & G' & \xrightarrow{\psi'} & F' \end{array}$$

そして (α, β) が次のように $(1_{F'}, f \cdot 1_{F'}) = (1_S, f)^{\oplus n}$, $n := \text{rk}_S(F')$, を経由することがわかる:

$$\begin{array}{ccccc}
F & \xrightarrow{\varphi} & G & \xrightarrow{\psi} & F \\
\alpha \downarrow & \searrow \alpha & \downarrow \beta & \searrow \gamma & \downarrow \alpha \\
F' & & F' & & F' \\
\alpha \downarrow & \searrow \varphi' & \downarrow \beta & \searrow \psi' & \downarrow \alpha \\
F' & \xrightarrow{\varphi'} & G' & \xrightarrow{\psi'} & F'
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
(\varphi, \psi) & & \\
\downarrow (\alpha, \beta) & \searrow (\alpha, \gamma) & \\
(\varphi', \psi') & \swarrow (1_{F'}, \varphi') & (1_S, f)^{\oplus n}
\end{array}$$

注意 1.11. 証明の $M = \text{Cok}(\varphi, \psi) \in \text{CM}(R)$ の部分について、本稿では観察 1.1 の逆を辿るという証明を採用したが、教科書 [Yos] では

$$\cdots \rightarrow F \otimes_S R \xrightarrow{\varphi \otimes_S R} G \otimes_S R \xrightarrow{\psi \otimes_S R} F \otimes_S R \xrightarrow{\varphi \otimes_S R} G \otimes_S R \rightarrow M \rightarrow 0$$

が M の R 上の自由分解であることの帰結として (depth lemma から) $M \in \mathbf{CM}(R)$ であることを示している。 M が周期 2 の自由分解を持つというこの結果は、 R 上の syzygy が周期 2, すなわち $\Omega_R^2 \cong \text{id}_{\mathbf{CM}(R)}$ であるということを意味している。

例 1.12. (1) $S = k[[x]]$, $f = x^n$ ($n \geq 1$) とする。 $1 \leq i \leq n$ に対し、 f の行列因子化 (x^i, x^{n-i}) に対応する R 加群は $S/(x^i)$ であり、 $\mathrm{MF}_S(f)$ で考えれば明らかなようにこれは直既約である。サマースクールにて示されたように、実は $\mathrm{ind}(\mathrm{CM} R) = \{S/(x^i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ である。

(2) $S = k[[x, y, z]]$, $f = x^2 + yz$ とする。このとき、 f の行列因子化

$$\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} \right)$$

に対応する R 加群は $(x, y)R$ である。言い換えれば、

$$R^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}} R^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}} R$$

は R 加群の完全列である。これは素直に示されるが、一応詳細に書いておく。以下、 S の元と $R = S/(f)$ の元を区別せず書く。 ${}^t[a_1, a_2] \in R^2$ が $xa_1 + ya_2 = (x^2 + yz)b$, $b \in S$, を満たすとする。 $f = x^2 + yz$ を法として考えてよいので、 $a_i = c_i(y, z) + d_i(y, z)x$ ($c_i, d_i \in k[[y, z]]$) としてよい。したがって $b \in k[[y, z]]$ であり、

$$x^2d_1(y, z) + x(c_1(y, z) + yd_2(y, z)) + yc_2(y, z) = x^2b(y, z) + yzb(y, z)$$

となる。よって

$$\begin{cases} d_1(y, z) = b(y, z) \\ c_1(y, z) + yd_2(y, z) = 0 \\ yc_2(y, z) = yzb(y, z) \end{cases}$$

であり、これから

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xb(y, z) - yd_2(y, z) \\ zb(y, z) + xd_2(y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(y, z) \\ d_2(y, z) \end{bmatrix}$$

となる。

次に、安定圏 $\underline{\mathbf{CM}}(R)$ と行列因子化の関係を見る。

定義 1.13. f の行列因子化 (φ, ψ) が被約であるとは、 $\text{Im}(\varphi) \subset \mathfrak{m}G$ かつ $\text{Im}(\psi) \subset \mathfrak{m}F$ 、すなわち φ, ψ を行列として表したときの成分がすべて非単元であるときにいう。

注意 1.14. (φ, ψ) が f の行列因子化のとき、基本変形によって、正則行列 $P, Q \in \text{GL}_n(S)$ が存在して

$$P\varphi Q = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & \varphi' \end{bmatrix}, \quad (\varphi' \text{ の成分}) \subset \mathfrak{m}_S$$

とできる。つまり、被約という言葉は行列としての被約から来ていると思われる。

例 1.15. 例 1.6 のうち、自明な行列因子化 $(0, 0), (1_S, f), (f, 1_S)$ は被約でないが、他はすべて被約である。

補題 1.16. $(\varphi, \psi) \in \text{MF}_S(f)$ が被約なら、 $\text{Cok}(\varphi, \psi) = \text{Cok } \varphi$ は R を直和因子に持たない。

証明. R 加群として $\text{Cok}(\varphi) \cong R \oplus N$, $N \in \underline{\mathbf{CM}}(R)$, と直和分解されたと仮定すると、

$$\begin{aligned} \text{MF}_S(f) &\xrightarrow{\sim} \underline{\mathbf{CM}}(R), \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \text{Cok } \varphi, \\ (f, 1_S) &\mapsto R, \\ (\varphi', \psi') &\mapsto N \end{aligned}$$

より、 $\text{MF}_S(f)$ において

$$(\varphi, \psi) \cong \left(\begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & \varphi' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1_S & 0 \\ 0 & \psi' \end{bmatrix} \right)$$

であるが、 $1_S \notin \mathfrak{m}_S$ より右辺は被約でないので (φ, ψ) も被約でない。 $\square$

命題 1.17. $(\varphi, \psi) \in \text{MF}_S(f)$ とする。

(1) 被約な行列因子化 $(\varphi_0, \psi_0) \in \text{MF}_S(f)$ と整数 $p, q \geq 0$ が存在して、 $\text{MF}_S(f)$ において

$$(\varphi, \psi) \cong (\varphi_0, \psi_0) \oplus (1_S, f)^{\oplus p} \oplus (f, 1_S)^{\oplus q}$$

と直和分解される。

(2) $\underline{\mathbf{CM}}(R)$ が Krull–Schmidt 圏 (例えば S が完備) なら、(1) の分解は同型を除いて一意であり、特に、 (φ, ψ) が被約であることと $(1_S, f), (f, 1_S)$ を直和因子に持たないことは同値である。

証明. (1) $(\varphi: S^n \rightarrow S^n, \psi: S^n \rightarrow S^n)$ とする。基本変形によって、正則行列 $P, Q \in \text{GL}_n(S)$ が存在して

$$P\varphi Q = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & \varphi' \end{bmatrix}, \quad (\varphi' \text{ の成分}) \subset \mathfrak{m}_S$$

とできる。このとき $\text{Cok}(\varphi')$ は $\text{Cok}(\varphi) \in \underline{\mathbf{CM}}(R)$ の直和因子に同型だから、 $(\varphi', \psi') \in \text{MF}_S(f)$ となる $\psi': S^{n-r} \rightarrow S^{n-r}$ が存在する。すると

$$\begin{array}{ccccc} S^n & \xrightarrow{\varphi} & S^n & \xrightarrow{\psi} & S^n \\ Q^{-1} \downarrow \cong & & P \downarrow \cong & & Q^{-1} \downarrow \cong \\ S^n & \xrightarrow{\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & \varphi' \end{bmatrix}} & S^n & \xrightarrow{\begin{bmatrix} fE_r & 0 \\ 0 & \psi' \end{bmatrix}} & S^n \end{array}$$

という可換図式が得られる（注意 1.8）から、 $\mathbf{MF}_S(f)$ において

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi) &\cong \left(\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & \varphi' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} fE_r & 0 \\ 0 & \psi' \end{bmatrix} \right) \\ &\cong (E_r, fE_r) \oplus (\varphi', \psi') \\ &\cong (1_S, f)^{\oplus r} \oplus (\varphi', \psi') \end{aligned}$$

この議論を $(\psi', \varphi') \in \mathbf{MF}_S(f)$ に対して行くと、整数 $s \geq 0$ と行列因子化 $(\psi'', \varphi'') \in \mathbf{MF}_S(f)$ が存在して、 $(\psi'' \text{の成分}) \subset \mathfrak{m}_S$ かつ

$$(\psi', \varphi') \cong (1_S, f)^{\oplus s} \oplus (\psi'', \varphi'')$$

が成り立つ。すると、 $(\varphi' \text{の成分}) \subset \mathfrak{m}_S$ より $(\varphi'' \text{の成分}) \subset \mathfrak{m}_S$ で、

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi) &\cong (1_S, f)^{\oplus r} \oplus (\varphi', \psi') \\ &\cong (1_S, f)^{\oplus r} \oplus (f, 1_S)^{\oplus s} \oplus (\varphi'', \psi'') \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで (φ'', ψ'') は被約なので、これが求める分解である。

(2) (φ, ψ) が被約行列因子化 $(\varphi_0, \psi_0), (\varphi'_0, \psi'_0)$ と整数 $p, q, r, s \geq 0$ を用いて

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi) &\cong (\varphi_0, \psi_0) \oplus (1_S, f)^{\oplus p} \oplus (f, 1_S)^{\oplus q} \\ &\cong (\varphi'_0, \psi'_0) \oplus (1_S, f)^{\oplus r} \oplus (f, 1_S)^{\oplus s} \end{aligned} \tag{1.3}$$

と分解されたとする。加法関手 $\text{Cok}: \mathbf{MF}_S(f) \rightarrow \mathbf{CM}(R)$ でうつすと、 $\mathbf{CM}(R)$ において

$$\begin{aligned} \text{Cok } \varphi &\cong \text{Cok}(\varphi_0) \oplus R^q \\ &\cong \text{Cok}(\varphi'_0) \oplus R^s. \end{aligned}$$

ここで、 R は局所環だから R 加群として直既約で、補題 1.16 より $\text{Cok}(\varphi_0), \text{Cok}(\varphi'_0)$ は R を直和因子に持たない。よって、 $\mathbf{CM}(R)$ が Krull–Schmidt 圏であることから、 $q = s$ かつ $\text{Cok}(\varphi_0) \cong \text{Cok}(\varphi'_0)$ である。このとき、極小自由分解の一意性より

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S^n & \xrightarrow{\varphi_0} & S^n & \longrightarrow & \text{Cok}(\varphi_0) \longrightarrow 0 \\ & & \exists \alpha \downarrow \cong & & \exists \beta \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & S^{n'} & \xrightarrow{\varphi'_0} & S^{n'} & \longrightarrow & \text{Cok}(\varphi'_0) \longrightarrow 0 \end{array}$$

という可換図式が得られるので、

$$\begin{array}{ccccc} S^n & \xrightarrow{\varphi_0} & S^n & \xrightarrow{\psi_0} & S^n \\ \alpha \downarrow \cong & & \beta \downarrow \cong & & \alpha \downarrow \cong \\ S^{n'} & \xrightarrow{\varphi'_0} & S^{n'} & \xrightarrow{\psi'_0} & S^{n'} \end{array}$$

より $(\varphi_0, \psi_0) \cong (\varphi'_0, \psi'_0)$ 。あとは (1.3) において行列のサイズを比較すれば $p = r$ がわかる。 $\square$

定義 1.18.

$$\underline{\mathbf{MF}}_S(f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{MF}_S(f) / [(1_S, f), (f, 1_S)]$$

とおく。 $\mathbf{CM}(R)$ が Krull–Schmidt 圏なら、命題 1.17 より $\underline{\mathbf{MF}}_S(f)$ の対象は f の被約な行列因子化全体である。

系 1.19 (Eisenbud の行列因子化定理 [Ei80, Corollary 6.3]). 定理 1.10 の圏同値 $\mathbf{MF}_S(f) / [(1_S, f)] \xrightarrow{\sim} \mathbf{CM}(R)$ は圏同値

$$\underline{\mathbf{MF}}_S(f) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbf{CM}}(R)$$

を誘導する (R が Gorenstein だから $\underline{\mathbf{CM}}(R)$ は三角圏であり、この圏同値によって $\underline{\mathbf{MF}}_S(f)$ に三角構造を入れることで三角同値と言える)。特に、 $\underline{\mathbf{CM}}(R)$ が Krull–Schmidt 圏なら、対象の同型類を考えることで次の全単射が得られる。

$$\{f \text{ の被約行列因子化 } \} / \cong \xrightarrow{\sim} \{ \text{非零自由因子を持たない CM } R \text{ 加群 } \} / \cong \\ [(\varphi, \psi)] \mapsto [\text{Cok } \varphi]$$

証明. $\text{Cok}(f, 1_S) = \text{Cok}(S \xrightarrow{f} S) = S/(f) = R$ と $\underline{\mathbf{CM}}(R) = \underline{\mathbf{CM}}(R)/[R]$ から従う。 $\square$

注意 1.20. k を標数が 2 ではない代数閉体とし、 $S = k[[x_1, \dots, x_d]]$ とするとき、次の三角同値が知られている (Knörrer の周期性定理 [Yos, (12.10) THEOREM]) :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{CM}}(S/(f)) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathbf{CM}}(S[[y, z]]/(f + yz)) \\ \simeq \uparrow & & \uparrow \simeq \\ \underline{\mathbf{MF}}_S(f) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathbf{MF}}_{S[[y, z]]}(f + yz) \\ \Psi & & \Psi \\ (\varphi, \psi) & \longmapsto & \left(\begin{bmatrix} \varphi & yE \\ zE & -\psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \psi & yE \\ zE & -\varphi \end{bmatrix} \right) \end{array}$$

例 1.21. 例 1.12 で挙げた 2 つの例は Knörrer の周期性定理によって関係している。実際、 $S = k[[x]]$, $f = x^2$ として対象の同型類の対応を書くと以下ようになる：

$$\begin{array}{ccc} \{k[[x]]/(x)\} & \xrightarrow{\sim} & \{(x, y)\} \\ \sim \uparrow & & \uparrow \sim \\ \{(x, x)\} & \xrightarrow{\sim} & \{(\begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix})\} \end{array}$$

2 整環を用いた言い換え

記号 2.1. 本節を通して、

$$\Lambda := \begin{bmatrix} S & S \\ (f) & S \end{bmatrix}$$

とおく。これは S 代数である。また

$$e_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおく。このとき $1_\Lambda = e_1 + e_2$ である。

命題 2.2. Λ は Gorenstein S 整環である。(したがって $\underline{\mathbf{CM}}(\Lambda)$ は三角圏である。)

証明. S 整環であることは、 S 加群の同型 $\Lambda \cong M_2(S) \cong \text{End}_S(S^{\oplus 2}) \cong S^{\oplus 4}$ から従う^{*3}。具体的な基底としては例えば、 $M_2(S)$ の (i, j) 行列因子を E_{ij} として $\{E_{11}, E_{12}, fE_{21}, E_{22}\}$ で与えられる。

Gorenstein 性は、直既約射影加群の同型類

$$\Lambda e_1 = \begin{bmatrix} S \\ (f) \end{bmatrix}, \quad \Lambda e_2 = \begin{bmatrix} S \\ S \end{bmatrix}$$

^{*3} 最初の同型 $\Lambda \cong M_2(S)$ は S 代数の同型ではない (積を保たない)。

が canonical dual $(-)^{\vee} := \text{Hom}_S(-, S) : \text{CM}(\Lambda) \xrightarrow{\sim} \text{CM}(\Lambda^{\text{op}})$ によってそれぞれ

$$(\Lambda e_1)^{\vee} \xrightarrow{\sim} [S \quad f^{-1}S] \stackrel{*4}{\xrightarrow{\sim}} [(f) \quad S] = e_2\Lambda, \quad (\Lambda e_2)^{\vee} \xrightarrow{\sim} [S \quad S] = e_1\Lambda$$

にうつされることから従う $((\Lambda\Lambda)^{\vee} \cong \Lambda_{\Lambda} \in \text{proj}(\Lambda^{\text{op}})$ あるいは $\text{CM}(\Lambda)$ が Frobenius 圏となる)。□

注意 2.3. 発表時の間違った説明についてここで補足する。Gorenstein 性は、トレース形式

$$T : \Lambda \times \Lambda \rightarrow S; \quad (x, y) \mapsto \text{Tr}(xy)$$

が非退化結合的 S 双線型形式であることからわかると述べた。ここで非退化性は、 S 線形写像

$$\begin{cases} l_T : \Lambda\Lambda \rightarrow (\Lambda\Lambda)^{\vee}; & x \mapsto T(x, -) \\ r_T : \Lambda\Lambda \rightarrow (\Lambda\Lambda)^{\vee}; & y \mapsto T(-, y) \end{cases}$$

が単射ということを意味する。このとき、双対 $(-)^{\vee} : \text{CM}(S) \xrightarrow{\sim} \text{CM}(S)$ より $r_T \cong (l_T)^{\vee}$ が全射だから r_T が同型、と説明をしたが、その後指摘があったように、この議論は間違いである。なぜなら、一般に $\text{CM}(S)$ は核で閉じないため、 l_T の単射性は完全圏 $\text{CM}(S)$ において inflation であることを意味せず、したがって双対 $(-)^{\vee} : \text{CM}(S) \xrightarrow{\sim} \text{CM}(S)$ によって deflation (これは全射) にうつると主張できないからである。

ちなみに、体上の有限次元多元環の場合は次元を比較することで r_T が同型になるため、非退化結合的双線型形式の存在から自己移入性、正確には Frobenius 性を判定することができる (cf. [Lam2, (3.15) Theorem])。

この S 整環 Λ 上の Cohen–Macaulay 加群を考えることは f の行列因子化を考えることと同じである。すなわち、次の主張が成り立つ。

命題 2.4. 次の圏同値が存在する。

$$\text{CM}(\Lambda) \simeq \text{MF}_S(f)$$

証明. 互いに準逆となる関手 $\Phi : \text{CM}(\Lambda) \rightarrow \text{MF}_S(f)$, $\Psi : \text{MF}_S(f) \rightarrow \text{CM}(\Lambda)$ を構成する。これらの構成は、下三角行列環上の加群の記述 ([ARS, Chapter III, Proposition 2.2], [ASS, Appendix A, 2.7. Example]) の類似である (注意 2.6 も参照)。

まず、関手 $\Phi : \text{CM}(\Lambda) \rightarrow \text{MF}_S(f)$ を次のように定義する。

- $M \in \text{CM}(\Lambda)$ とする。このとき M は S 加群として有限生成自由であり、加法関手 $e_i \cdot (-) : \text{Mod } \Lambda \rightarrow \text{Mod}(e_i \Lambda e_i) \cong \text{Mod } S$ を用いて、有限生成自由 S 加群 $e_1 M, e_2 M$ が得られる。今の場合具体的には、 $e_1 M$ には Λ の左上の成分の S を、 $e_2 M$ には Λ の右下の成分の S によって作用が与えられる。また、 S 線形写像 $\varphi : e_1 M \rightarrow e_2 M$ を、 $e_1 m \in e_1 M$ に対して

$$\varphi(e_1 m) := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} e_1 m = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} m = e_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} m \in e_2 M$$

で定める。さらに、 S 線形写像 $\psi : e_2 M \rightarrow e_1 M$ を、 $e_2 m \in e_2 M$ に対して

$$\psi(e_2 m) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e_2 m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} m = e_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} m \in e_1 M$$

で定める。すると、

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \end{cases}$$

*4 サマースクールでも何度か使われた同型 $\Lambda e_1 : S \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_S(\Lambda e_1, S)$ を使って計算している。この同型については、[BouAC, Chapter II, §5.5, Proposition 9] に一般的な主張がある。

からわかるように、 $(\varphi, \psi) \in \mathbf{MF}_S(f)$ である。そこで、

$$\Phi(M) := (\varphi, \psi) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} : e_1 M \rightarrow e_2 M, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : e_2 M \rightarrow e_1 M \right)$$

と定める。

- $\mathbf{CM}(\Lambda)$ における射 $u: M \rightarrow N$ に対し、 u が Λ 加群の準同型であることから $u(e_i M) \subset e_i N$ であり、さらに図式

$$\begin{array}{ccccc} e_1 M & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix}} & e_2 M & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} & e_1 M \\ u \downarrow & & \downarrow u & & \downarrow u \\ e_1 N & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix}} & e_2 N & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} & e_1 N \end{array}$$

は可換である。そこで $\Phi(u) := (u: e_1 M \rightarrow e_1 N, u: e_2 M \rightarrow e_2 N)$ と定める。

次に、関手 $\Psi: \mathbf{MF}_S(f) \rightarrow \mathbf{CM}(\Lambda)$ を次のように定義する。

- 任意の $(\varphi, \psi) = (\varphi: G \rightarrow F, \psi: F \rightarrow G) \in \mathbf{MF}_S(f)$ に対して、

$$\Psi(\varphi, \psi) := F \oplus G$$

と定める。ここで $F \oplus G$ の左 Λ 加群の構造は、通常の行列の演算のように、すなわち次で定義する。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ cf & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} ax + b\psi(y) \\ c\varphi(x) + dy \end{bmatrix} \quad (a, b, c, d \in S, x \in F, y \in G)$$

例えば結合則は、次の計算と $\varphi\psi = \psi\varphi = f$ からわかる。

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ cf & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ c'f & d' \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} aa' + bc'f & ab' + bd' \\ (ca' + dc')f & cb'f + dd' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (aa' + bc'f)x + (ab' + bd')\psi(y) \\ (ca' + dc')\varphi(x) + (cb'f + dd')y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ cf & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ c'f & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} a & b \\ cf & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'x + b'\psi(y) \\ c'\varphi(x) + d'y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a(a'x + b'\psi(y)) + b\psi(c'\varphi(x) + d'y) \\ c\varphi(a'x + b'\psi(y)) + d(c'\varphi(x) + d'y) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

この左 Λ 加群 $F \oplus G$ を構造射 $S \rightarrow \Lambda$ により S 加群とみなしたものは S 加群 F, G の直和 $F \oplus G$ と一致し、後者は当然有限生成自由であるから、確かに $F \oplus G \in \mathbf{CM}(\Lambda)$ である。

- $\mathbf{MF}_S(f)$ における射 $(\alpha, \beta): (\varphi, \psi) \rightarrow (\varphi', \psi')$ に対して、 $\Psi(\alpha, \beta) := \alpha \oplus \beta$ と定義する。

このように定義された Φ と Ψ が互いに準逆であることはほとんど明らかである。 $\square$

安定 $\mathbf{CM}$ 圏を考えると、 S 整環 Λ と超曲面局所環 $R = S/(f)$ が次のように関係することがわかる。

系 2.5. 命題 2.4 の圏同値 $\mathbf{CM}(\Lambda) \simeq \mathbf{MF}_S(f)$ は圏同値 $\underline{\mathbf{CM}}(\Lambda) \simeq \underline{\mathbf{MF}}_S(f)$ を誘導し、したがって (系 1.19 と合わせて)

$$\underline{\mathbf{CM}}(\Lambda) \simeq \underline{\mathbf{MF}}_S(f) \simeq \underline{\mathbf{CM}}(R)$$

となる。

証明. $\{\Lambda e_1, \Lambda e_2\}$ が直既約射影左 Λ 加群の同型類を与えるから、命題 2.4 の圏同値 $\text{CM}(\Lambda) \xrightarrow{\simeq} \text{MF}_S(f)$ による $\Lambda e_1, \Lambda e_2$ の行き先がそれぞれ $(1_S, f), (f, 1_S)$ に同型であることを示せば十分であるが、 Λe_1 については

$$\begin{array}{ccccc}
 e_1 \Lambda e_1 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix}} & e_2 \Lambda e_1 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} & e_1 \Lambda e_1 \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 S & \xrightarrow{f} & (f) & \xleftarrow{\quad} & S \\
 \parallel & & \uparrow f \cong & & \parallel \\
 S & \xlongequal{\quad} & S & \xrightarrow{f} & S
 \end{array}$$

から、 Λe_2 については

$$\begin{array}{ccccc}
 e_1 \Lambda e_2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix}} & e_2 \Lambda e_2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} & e_1 \Lambda e_2 \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 S & \xrightarrow{f} & S & \xlongequal{\quad} & S
 \end{array}$$

からわかる。 □

注意 2.6. 命題 2.4 の圏同値は下三角行列環上の加群の記述の類似であると述べたが、実際にそれから誘導された圏同値になっていることがわかる（下の図式の左上部分）。要約も兼ねて、これまで得られた圏同値をまとめた図式を以下に記す。

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Mod} \begin{bmatrix} S & 0 \\ (f) & S \end{bmatrix} & \xrightarrow{\simeq} & \text{Arr}(\text{Mod } S) & \xrightarrow{\text{Cok}} & \text{Mod } S \\
 \uparrow & & \uparrow \text{pr}_1 & & \uparrow \\
 \text{Mod } \Lambda & & & & \text{Mod } R \\
 \uparrow & & & & \uparrow \\
 \text{CM}(\Lambda) & \xrightarrow[\text{命題 2.4}]{\simeq} & \text{MF}_S(f) & \searrow & \text{CM}(R) \\
 \downarrow & & \downarrow & \nearrow \text{定理 1.10} & \downarrow \\
 & & \text{MF}_S(f)/[(1_S, f)] & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \underline{\text{CM}}(\Lambda) & \xrightarrow[\text{系 2.5}]{\simeq} & \underline{\text{MF}}_S(f) & \xrightarrow[\text{系 2.5}]{\simeq} & \underline{\text{CM}}(R)
 \end{array}$$

参考文献

- [ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory*, Cambridge University Press, 2006.
- [ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [BouAC] N. Bourbaki, *Elements of mathematics. Commutative algebra*. Translated from the French. Hermann, Publishing Co., Reading, MA, etc., 1972.
- [Ei80] D. Eisenbud, *Homological algebra with an application to group representations*, Transactions of the American Mathematical Society, **260**(1), (1980), 35–64.
- [Lam2] T. Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Graduate Texts in Mathematics **189**, Springer–Verlag, 1998.

- [LW] G. J. Leuschke, R. Wiegand, *Cohen-Macaulay representations*, Vol. 181 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2012.
- [Yos] Y. Yoshino, *Cohen-Macaulay Modules over Cohen-Macaulay Rings*, London Mathematical Society Lecture Note Series **146**, Cambridge University Press, 1990.